

УДК 556:532.5

doi: 10.55959/MSU0579-9406-4-2023-63-2-99-105

ДЕБИТ СКВАЖИНЫ С ЗАДАННЫМ УРОВНЕМ НА СЕТОЧНЫХ МОДЕЛЯХ НАПОРНЫХ И БЕЗНАПОРНЫХ ПОТОКОВ

Ростислав Степанович Штенгелов¹, Сергей Павлович Поздняков²

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия; rssteng@mail.ru

² Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия; sppozd@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2932-4565>

Аннотация. Рассмотрены проблемы реализации действующих гидрогеологических скважин с заданным положением динамического уровня на сеточных гидрогеодинамических моделях. Разработаны оригинальные алгоритмы определения дебита скважины при напорном и безнапорном режиме фильтрации. Практические приемы апробированы на имитационных моделях по аналитическому решению для неограниченного изолированного пласта.

Ключевые слова: гидрогеологическая скважина; заданный уровень в скважине; дебит скважины; гидрогеодинамическая модель; безнапорный поток; напорно-безнапорный поток

Для цитирования: Штенгелов Р.С., Поздняков С.П. Дебит скважины с заданным уровнем на сеточных моделях напорных и безнапорных потоков // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 4. Геология. 2023. № 2. С. 99–.

FLOW RATE OF A WELL WITH A CONSTANT HEAD ON THE NUMERICAL MODELS OF CONFINED AND UNCONFINED FLOWS

Rostislav S. Shtengelov¹, Sergey P. Pozdniakov²

¹ Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; rssteng@mail.ru

² Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; sppozd@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2932-4565>

Abstract. The problems of simulation of pumping hydrogeological wells with constant hydraulic head on the finite-difference flow models are considered. The original algorithms for determining the flow rate of the well at confined, unconfined and confined-unconfined model layer are developed. Practical techniques are tested on simulation models by using analytical solution for flow toward a well with constant head in infinite unconfined homogeneous aquifer.

Keywords: hydrogeological well; pumping well with constant head; well flow rate; flow model; unconfined flow; confined-unconfined flow

For citation: Shtengelov R.S., Pozdniakov S.P. Flow rate of a well with a constant head on the numerical models of confined and unconfined flows. *Moscow University Geol. Bull.* 2023; 2: 99–. (In Russ.).

Введение. По назначению и режиму функционирования действующие (с ненулевым дебитом) гидрогеологические скважины разделяются на две группы:

а) с заданным дебитом (производительностью), величина которого ограничивается расчетным допустимым понижением уровня. В основном это водозаборные скважины в системах питьевого, хозяйствственно-бытового и технического водоснабжения,

б) с заданным уровнем (понижением уровня). В основном это скважины в системах защитного дренажа, обеспечивающие требуемое положение уровней в пределах расположения защищаемых объектов городской инфраструктуры, горнодобывающих и разнообразных промышленных предприятий. К этой же группе относятся скважины, работающие в режиме самоизлива (например, на предприятиях добычи минеральных вод), и скважины, оснащенные насосным оборудованием, работающим «на храпок».

Постановка проблемы. Методика моделирования скважин первой группы разработана в полной мере. Для получения пространственно-временного распределения напоров в модельной области заданный дебит непосредственно подается в «водозаборный» узел; образующийся отклик в виде напора (понижения) в блоке уточняется последующим расчетом, учитывая различие реальной и модельной структуры притока к скважине. Это уточнение может быть выполнено аналитически путем постпроцессорной обработки результатов расчетов модельных напоров в блоках со скважинами [Штенгелов, 2019], если скважины на сеточной модели реализуются как источники. В широко используемой программе моделирования геофильтрации MODFLOW 2005 [Harbaugh, 2005] эта поправка может быть вычислена непосредственно в процессе численного моделирования, если используется специальный пакет MNW2 [Konikov et al., 2009], разработанный для общего случая, когда в разрезе

скважина вскрывает несколько слоев трехмерной численной сетки.

Для скважин второй группы конечной целью моделирования также является пространственное распределение напоров (понижений), необходимое, например, для анализа площадного дренажного эффекта и учета взаимодействий в системах скважин. Проблема заключается в том, что непосредственное задание необходимого уровня в «водозаборный» узел модели невозможно в связи с различиями реальной и модельной структуры течения. Этую проблему, как будет показано ниже, можно успешно решать в условиях водоносных горизонтов с постоянной (независимой от положения уровня) проводимостью, пользуясь связью поправки на разницу напора в скважине и в блоке с проводимостью пласта и параметрами конечно-разностной сетки [Штенгелев, 2019]. Для безнапорных водоносных горизонтов, проводимость которых зависит от положения уровня свободной поверхности, отсутствуют рекомендации для корректной реализации действующих скважин с заданным положением уровня (понижением).

Принципиальное отличие от скважин первой группы заключается в том, что при работе скважины с заданным постоянным напором ее дебит непрерывно уменьшается. В неограниченной области при сохраняющемся нестационарном режиме фильтрации это уменьшение теоретически стремится к нулю; при наличии в области стабилизирующих граничных элементов 1-го или 3-го рода дебит фиксируется на некоторой достигнутой величине. Таким образом, возникает задача оценки величины дебита, при котором достигается заданное положение уровня в скважине. Такие оценки для стационарного состояния депрессии или во временной динамике необходимы не только для получения реального пространственно-временного распределения напоров, но и в прикладном смысле — для обоснованного проектирования сечения водоотводящих коммуникаций на весь расчетный период работы скважины.

Ниже рассматриваются методические и практические аспекты решения этой проблемы.

Методика решения. Водоносный горизонт с постоянной проводимостью T . Это преимущественно межпластовые водоносные горизонты, у которых пониженные пьезометрические уровни не опускаются ниже кровли водовмещающего пласта. К этой же категории в пределах допустимой погрешности расчетов можно отнести грунтовые водоносные горизонты, если понижение свободной поверхности не превышает 5–10% начальной мощности.

Модельное решение в «водозаборном» узле прямоугольной сетки H_{mod} требует для перехода к уровню в реальной действующей скважине H_c введения поправки [Шестаков, 1979, Штенгелев, 1988, 2019]:

$$H_c = H_{\text{mod}} - \frac{Q_c}{T} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\Delta x}{r_c} - 0,25 \right), \quad (1)$$

где Q_c , r_c — дебит и радиус фильтра скважины, Δx — размер стороны квадратного блока модельной сетки.

Из (1) следует, что расчетный дебит скважины на модели может быть определен путем установки в «водозаборный» узел граничного условия 3-го рода с заданным уровнем H_c и дополнительной проводимостью T^* :

$$Q = \begin{cases} T^*(H_{\text{mod}} - H_c) \\ 0; \quad H_{\text{mod}} \leq H_c \end{cases}, \quad T^* = \frac{T}{(2\pi)^{-1} \ln \frac{\Delta x}{r_c} - 0,25}. \quad (2)$$

В семействе программ MODFLOW для технической реализации этого условия удобно использовать пакет DRAIN [Harbaugh, 2005], входными параметрами которого для каждой скважины, работающей в режиме постоянного уровня, являются ее заданный уровень и дополнительная проводимость.

Грунтовый водоносный горизонт на горизонтальном водоупоре, однородный по вертикали (с начальной мощностью h_0 и коэффициентом фильтрации K).

Непосредственное использование зависимостей (1), (2) в этом случае неправомерно, поскольку величина проводимости $T = Kh$ зависит от неизвестного заранее решения. Возможны два подхода к преодолению этой проблемы.

Численный способ заключается в выполнении серии модельных решений с последовательным уточнением дополнительной проводимости T^* за счет корректировки «действующей» величины проводимости T в формуле (2). Для начальной итерации принимается:

$$T_0 = Kh_c \text{ или } T_0 = 0,5K(h_0 + h_c), \quad (3)$$

а на каждой последующей k -ой итерации:

$$T_k = 0,5K(h_{\text{mod},k-1} + h_c), \quad (4)$$

где $h_{\text{mod},k-1}$ — модельный отклик в «водозаборном» узле при дополнительной проводимости T_{k-1}^* .

На каждой итерации вычисляется дебит как расход через граничное условие 3-го рода:

$$Q_{c,k} = T_{k-1}^*(h_{\text{mod},k} - h_c). \quad (5)$$

Итерационный процесс продолжается до выполнения условия:

$$\frac{|Q_{c,k} - Q_{c,k-1}|}{Q_{c,k-1}} \leq \varepsilon, \quad (6)$$

где ε — принятая относительная погрешность оценки дебита.

Численно-аналитический способ основан на задании в блок со скважиной ее расчетного дебита, дающего заданный напор в ней. Нахождение этого дебита требует вспомогательных прогонов модели и базируется на линеаризации стационарного безнапорного фильтрационного потока согласно схеме

Дюпюи. В этой схеме связь модельного уровня в блоке с уровнем в реальной скважине принимает вид [Штенгелев, 2019]:

$$h_c = \sqrt{h_{\text{мод}}^2 - \frac{Q_c}{K} \left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{\Delta x}{r_c} - 0,5 \right)}, \quad (7)$$

откуда

$$h_{\text{мод}}^2 - h_c^2 = \frac{Q_c}{K} \left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{\Delta x}{r_c} - 0,5 \right). \quad (8)$$

В уравнении (8) два неизвестных — модельный уровень в блоке $h_{\text{мод}}$ и дебит скважины Q_c . Для безнапорной фильтрации в случае отсутствия нелинейностей, связанных с системно-зависимыми граничными условиями (например, формирования разрыва сплошности потока под водотоками) и источниками-стоками (например, прекращения испарения подземных вод при снижении уровня ниже критического), вблизи скважины $dh^2/dQ = \text{const}$, то есть для модельного уровня в блоке можно записать:

$$h_{\text{мод}}^2(Q_c) = h_0^2 - A \cdot Q_c, \quad (9)$$

где h_0 — уровень в расчетном блоке со скважиной при ее нулевом дебите, A — константа, совокупно зависящая от геофильтрационных параметров и граничных условий.

Подстановка (9) в (8) дает:

$$Q_c = \frac{(h_0^2 - h_c^2) \cdot K}{\left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{\Delta x}{r_c} - 0,5 \right) + A \cdot K}. \quad (10)$$

Для нахождения параметров h_0 и A достаточно сделать два прогона модели. Первый прогон необходим, если неизвестна начальная мощность водоносного горизонта. Численное решение, полученное в результате этого прогона с нулевым дебитом скважины, дает величину h_0 в блоке со скважиной. Второй прогон выполняется при некотором ненулевом дебите Q и позволяет определить константу A из уравнения (9). Для того, чтобы дебит, при котором определяется эта константа, был по возможности близок к искомому, целесообразно во втором прогоне задать в блоке со скважиной граничное условие постоянного напора $h_{\text{мод}} = h_c$ и в результате решения получить приток в этот блок Q , а затем рассчитать параметр A из уравнения (9).

Эта методика легко обобщается на случай напорно-безнапорного течения. Предположим, что исходный уровень в блоке со скважиной при ее нулевом дебите выше, чем кровля пласта, имеющего мощность m_0 , т.е. $h_0 > m_0$. В этом случае зависимость (9) преобразуется к виду:

$$h_{\text{мод}}^2 = m_0 - A(Q_c - Q_0); \quad Q_c > Q_0, \quad (11)$$

где Q_0 — дебит, при котором уровень в блоке равен мощности пласта.

В этом случае для определения параметра A из (11) также необходимо сделать два прогона модели. Первый прогон необходим для определения величины Q_0 . Для этого следует задать в блоке со скважиной граничное условие постоянного напора $h_{\text{мод}} = m_0$. Второй прогон выполняется так же, как для безнапорного пласта, а затем из (11) определяется величина параметра A . При этом выражение для искомого дебита получается подстановкой (11) в (8) в виде:

$$Q_c = \frac{(m_0^2 - h_c^2 + A \cdot Q_0) \cdot K}{\left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{\Delta x}{r_c} - 0,5 \right) + A \cdot K}. \quad (12)$$

В завершение описания рекомендуемых методик оценки дебита необходимо подчеркнуть, что результаты решений (5, 10, 12) отвечают тому состоянию модельного решения, для которого определены используемые значения $h_{\text{мод}}$. В случае стационарной постановки модельной задачи это единственный и окончательный результат; при необходимости анализа нестационарной зависимости $Q(t)$ рассмотренные приемы должны повторяться для всех требуемых моментов времени.

Апробация методики. Апробация предлагаемой методики выполнена путем сравнения численного и аналитического решений задачи притока к скважине в однородном изолированном неограниченном пласте.

Для получения численного решения на конечно-разностной сетке использована программа моделирования фильтрации MODFLOW 2005. Во избежание численных ошибок, связанных с конечно-плановыми размерами сетки, ее дизайн был выбран таким образом, чтобы за расчетный период моделирования область влияния скважины, расположенной в центре квадратной области, не достигала внешних границ. Для этого выбран достаточно большой размер сетки 600×600 блоков (физический размер модельной области 19×19 км), причем внутренняя часть 560×560 блоков имеют постоянный шаг $\Delta x = 10$ м с экспоненциальным возрастанием размера шага во внешней части области. Разработанная таким образом сетка дает численную ошибку при решении на ней задачи Тейса менее 2% во всей внутренней области.

Для аналитических расчетов использовалось известное решение [Mishra, Guyonnet, 1992; Perina, 2021] для дебита Q скважины радиусом r_c , работающей в неограниченном изолированном в разрезе напорном пласте с заданным понижением S_c :

$$Q \approx \frac{4\pi TS_c \exp(-u)}{W(u)}; \quad u = \frac{r_c^2}{4a^* t}; \quad a^* = \frac{T}{\mu^*}, \quad (13)$$

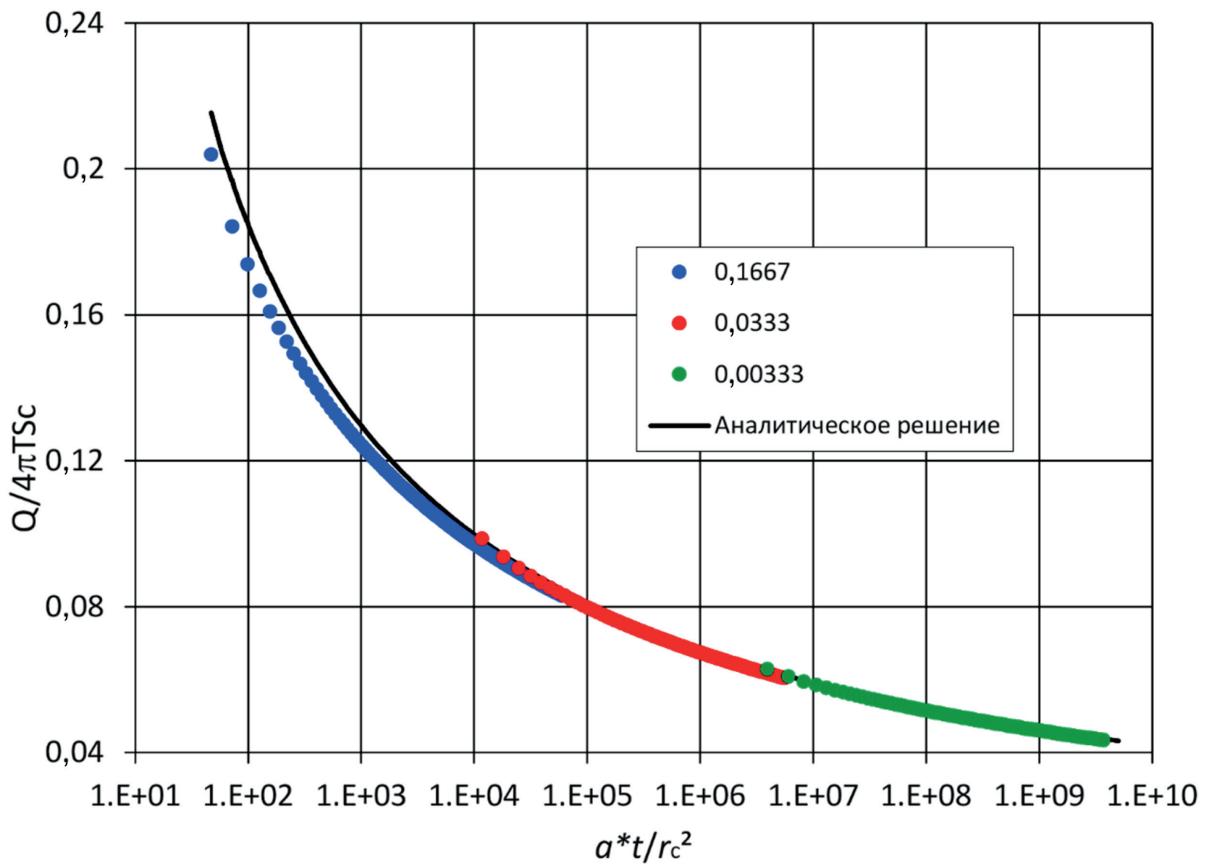


Рис. 1. Сравнение численного и аналитического расчета нестационарной работы скважины с заданным понижением в однородном изолированном напорном пласте (числа обозначают отношение радиуса скважины к размеру бока сетки)

где T — проводимость пласта, μ^* — упругая водоотдача.

Несмотря на то, что решение (13) является приближенным, его сравнение с численным обратным преобразованием точного решения в изображениях по Лапласу показало, что уже при $u \leq 7,7$ погрешность дебита, вычисленного по (13), составляет менее 1% и быстро затухает при уменьшении u . Таким образом, для расчетов работы одиночной скважины при опытных откаках и, тем более, при длительном водоотборе уравнение (13) является приемлемой аппроксимацией.

На рис. 1 показано сравнение численного и аналитического результатов для случая напорного пласта. При численном моделировании скважины использован пакет DRAIN с дополнительной проводимостью, определяемой по зависимости (2), а аналитический расчет выполнен по зависимости (13).

Из рис. 1 следует, что в самом широком диапазоне безразмерного времени a^*t/r_c^2 и соотношения радиуса скважины и размера блока сетки $r_c/\Delta x$ реализация граничного условия 3-го рода при помощи пакета DRAIN на численной модели напорного пласта дает результат, практически совпадающий с аналитическим решением.

Для безнапорного пласта с меняющейся насыщенной мощностью, используя линеаризацию по В.Г. Багрову — Н.Н. Веригину, уравнение (13) можно переписать в виде:

$$Q \approx \frac{2\pi K S_c (2h_0 - S_c) \exp(-u)}{W(u)}; u = \frac{r_c^2}{4at}; a = \frac{Kh_0}{\mu}, \quad (14)$$

где K — коэффициент фильтрации однородного по вертикали безнапорного пласта, имеющего начальную насыщенную мощность h_0 , μ — гравитационная водоотдача.

На рис. 2 приведено сравнение численного моделирования с зависимостью (14) для разных случаев понижения уровня в скважине по сравнению с начальной насыщенной мощностью — от 30 до 90% ее величины (табл. 1). Дополнительная проводимость в пакете DRAIN в каждом варианте моделирования рассчитывалась при текущей насыщенной мощности, равной начальной мощности минус половину понижения в скважине (способ А на рис. 2) или минус величину понижения в скважине (способ Б).

Из рис. 2 следует, что для случая безнапорного пласта способ А дает оценку сверху дебита скважины, а способ Б — оценку снизу. При этом ширина интервала оценок растет с ростом отношения понижения в скважине к величине начальной водонасыщенной мощности и уменьшается с ростом безразмерного времени. Таким образом, результаты показывают, что использование зависимости (2) с заранее рассчитанной дополнительной проводимостью в общем случае безнапорного пласта неправомерно.

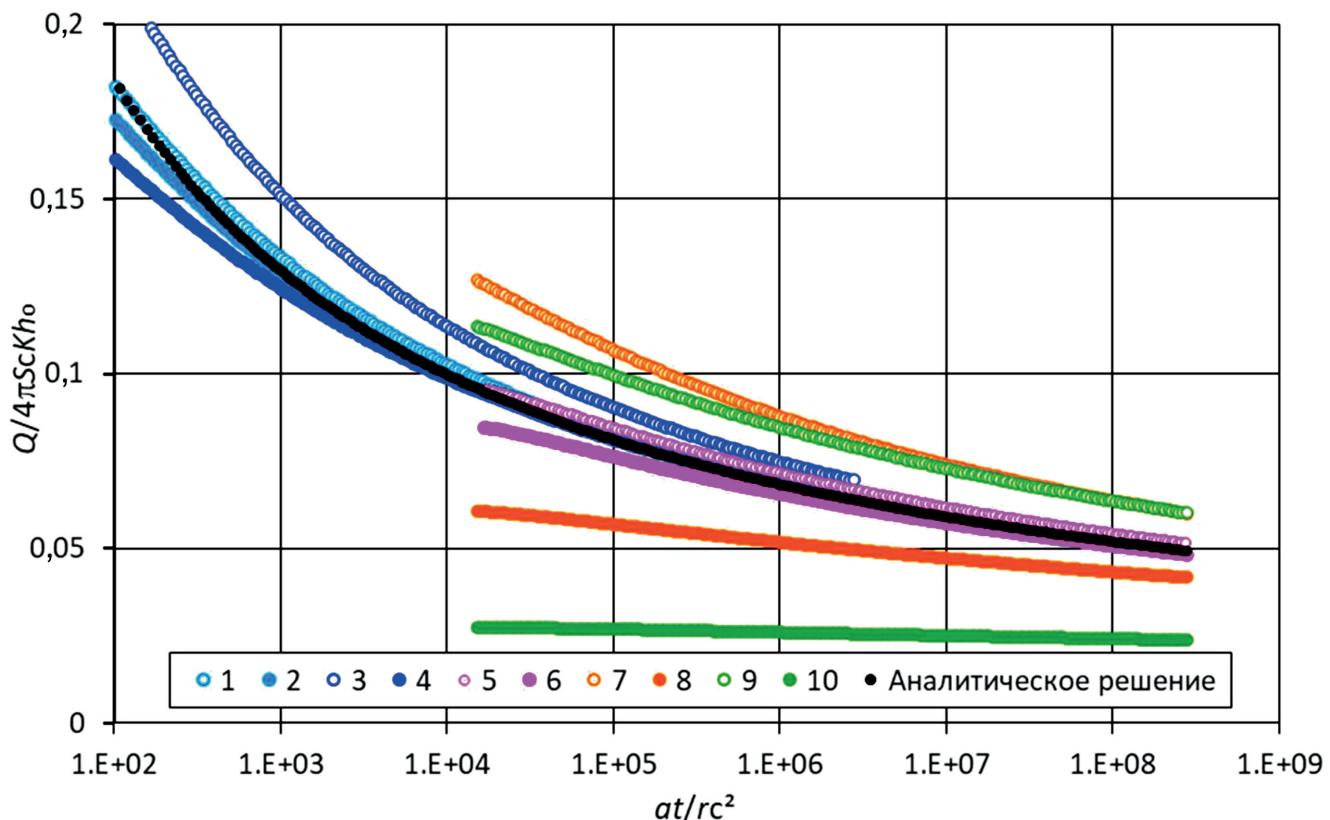


Рис. 2. Сравнение численного и аналитического расчета нестационарной работы скважины с заданным понижением в однородном изолированном безнапорном пласте (условные обозначения в табл. 1)

Таблица 1
Варианты модельных расчетов (условные обозначения к рисунку 2)

№ варианта на рис. 2	Отношение радиуса скважины к размеру блока сетки	Отношение понижения S_c к начальной насыщенной мощности h_0	Способ расчета дополнительной проводимости А: $T^* = K(h_0 - 0,5S_c)$ Б: $T^* = K(h_0 - S_c)$
1	0,1	0,3	А
2	0,1	0,3	Б
3	0,1	0,7	А
4	0,1	0,7	Б
5	0,01	0,3	А
6	0,01	0,3	Б
7	0,01	0,7	А
8	0,01	0,7	Б
9	0,01	0,9	А
10	0,01	0,9	Б

Для иллюстрации предложенных способов выполнены сравнительные расчеты работы скважины с радиусом фильтра $r_c = 0,1$ м в безнапорном водоносном горизонте с начальной мощностью $h_0 = 20$ м и коэффициентом фильтрации 25 м/сутки. Заданное понижение уровня $S_c = 12$ м, т.е. остаточный столб воды в скважине равен $h_c = 8$ м.

Сопоставление аналитической и модельной оценок проведено для шести моментов времени нестационарного режима от 0,01 до 1000 суток.

Результаты апробации **численного способа** (с использованием пакета DRAIN) приведены в

табл. 2, где для каждого момента времени показаны данные последней итерации. Завершение итераций выполнялось по условию (6) в сочетании с минимизацией отклонения модельной оценки от аналитической:

$$\frac{|Q_{\text{мод}} - Q_{\text{ан}}|}{Q_{\text{ан}}} \leq \varepsilon_{\text{ан}}, \quad (15)$$

либо если дальнейшая корректировка T^* не приводит к улучшению результата.

Результаты оценки дебита скважины с заданным уровнем численным способом

Таблица 2

	Время от начала откачки, сутки					
	0,01	0,1	1	10	100	1000
Аналитическая оценка $Q_{\text{ан}}$, м ³ /сутки	5658,84	4538,58	3788,46	3251,12	2847,27	2532,67
Проводимость пласта T , м ² /сутки	311,9	292,3	281,7	272,8	265,5	258,7
Дополнительная проводимость граничного условия 3-го рода на скважине T^* , м ² /сутки	645,9275	605,1638	583,3630	564,9317	549,7304	535,5810
$h_{\text{мод}}$, м	16,94	15,38	14,54	13,83	13,24	12,69
Модельная оценка $Q_{\text{мод}}$, м ³ /сутки	5777,39	4469,58	3818,12	3266,20	2858,89	2515,61
Изменение по сравнению с предыдущей итерацией ϵ , %	0,3	0,4	0,4	-2,2	-1,8	0,2
Отклонение от аналитической оценки $\epsilon_{\text{ан}}$, %	2,1	-1,5	0,8	0,5	0,4	-0,7

Во всех случаях для достижения приемлемой точности модельной оценки $Q_{\text{мод}}$ достаточным оказалось не более трех-четырех итераций.

Результаты апробации **численно-аналитического способа** (с использованием пакета WELL) приведены в табл. 3. Для каждого момента времени выполнен один модельный прогон с дебитом 2000 м³/сутки, по результатам которого определен коэффициент A из формулы (9) и вычислен искомый дебит по формуле (10).

Заключение. Практическим результатом моделирования является оценка дебита, с которым должна работать скважина для достижения заданного положения уровня (понижения). Различие рассмотренных приемов моделирования заключается в том, что в численном способе на модели в явном виде устанавливается заданный уровень (понижение), а дебит определяется дополнительным постмодельным расчетом, а при численно-аналитическом подходе в явном виде определяется дебит, приводящий к требуемому эффекту положения уровня в скважине.

Оба способа равнозначны по практическому результату моделирования. Сравнительные оценки имеют, скорее, эмоционально-прикладной, чем рациональный характер. Для конкретного пользователя может быть важным, что численный способ обеспечивает методическое единство приемов

моделирования независимо от гидрогеодинамического типа водоносного горизонта, тогда как при численно-аналитическом подходе вычислительная методика несколько видоизменяется для безнапорных и напорно-безнапорных условий. В то же время, при численном подходе решение о достижении приемлемого по точности результата должно приниматься субъективно, конкретным исполнителем в конкретной задаче, на основе наблюдения за динамикой итерационного процесса. В отличие от этого численно-аналитический способ формирует объективно единственное решение. Преимуществом численно-аналитического способа является минимальный объем модельных манипуляций, что немаловажно при необходимости прослеживания изменения дебита во времени.

В целом следует подчеркнуть высокую значимость численной составляющей в методике применения обоих способов, что требует особого внимания к детальности конструирования дизайна сетки и к другим ограничениям сеточного моделирования. В частности, можно предположить, что при апробации обоих способов значительные отклонения от аналитической оценки (около 2–4%) при небольших модельных временах (0,01–0,1 суток) могут быть связаны с весьма малыми размерами шага по времени (0,0005–0,005 суток).

Результаты оценки дебита скважины с заданным уровнем численно-аналитическим способом

Таблица 3

Дебит Q , м ³ /сутки	$h_{\text{мод}}$, м	Время от начала откачки, сутки					
		0,01	0,1	1	10	100	1000
0	20						
2000	$h_{\text{мод}}$, м	19,05	18,14	17,30	16,43	15,51	14,53
	A , сутки/м	0,0186	0,03551	0,0504	0,06509	0,07978	0,0945
Модельная оценка $Q_{\text{мод}}$, м ³ /сутки	5871,90	4531,89	3775,71	3239,24	2837,44	2524,63	
Аналитическая оценка $Q_{\text{ан}}$, м ³ /сутки	5658,84	4538,58	3788,46	3251,12	2847,27	2532,67	
Отклонение от аналитической оценки $\epsilon_{\text{ан}}$, %	3,77	-0,15	-0,34	-0,37	-0,35	-0,32	

Разработанные приемы создают основу для развития теории и практики гидрогеодинамического моделирования действующих скважин — в частности, при существенном несовершенстве скважин по степени вскрытия водоносного горизонта, для

контурных водозаборных и дренажных систем и других гидрогеологических и технологических условий, широко распространенных в производственной практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Шестаков В.М. Динамика подземных вод. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. 368 с.

Штенгелев Р.С. Формирование и оценка эксплуатационных запасов пресных подземных вод. М.: Недра, 1988. 231 с.

Штенгелев Р.С. О действующих гидрогеологических скважинах на сеточных моделях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 4. Геология. 2019. № 6. С. 68–72.

Harbaugh A. W. 2005, MODFLOW-2005, The U.S. Geological Survey modular ground-water model — The ground-water flow process: U.S. Geological Survey Techniques and Methods 6-A16. 238 р.

Konikov L.F., Hornberger G.Z., Halford K.J., Hanson R.T. Revised multi-node well (MNW2) package for MODFLOW

ground-water flow model: U.S. Geological Survey Techniques and Methods 6-A30, 2009. 67 р.

Mishra S., Guyonnet D. Analysis of observation-well response during constant-head testing // Ground Water. 1992. 30(4). P. 523–528.

Perina T. Flowing Well—Time-Domain Solution and Inverse Problem Revisited // Ground Water. 2021. 59(3). P. 438–442.

Статья поступила в редакцию 07.03.2023, одобрена после рецензирования 22.03.2023, принята к публикации 22.05.2023