

УДК 550.37

ПЕРЕХОДНЫЙ ИМПЕДАНС ЕМКОСТНЫХ ЭЛЕКТРОДОВ И СТЕЛЮЩИХСЯ ЛИНИЙ

Никита Игоревич Зорин^{1✉}, Алексей Анатольевич Бобачев²

¹ ООО «Северо-Запад», Москва, Россия; nikita.zorin.geophys@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-7245-216X>

² Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия; bobachev@gmail.com

Аннотация. Приведена уточненная за влияние краевых эффектов формула емкости тонкого диска над проводящей плоскостью и предложен ряд обобщенных формул для оценки переходного импеданса емкостных электродов над землей с конечной удельной проводимостью. Показано, что переходный импеданс стелющейся линии в широком частотном диапазоне описывается формулой Коула–Коула с показателем степени 0,9–1.

Ключевые слова: емкость диска, сопротивление заземления, контактный импеданс

Для цитирования: Зорин Н.И., Бобачев А.А. Переходный импеданс емкостных электродов и стелющихся линий // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 4. Геология. 2022. № 4. С. 138–148.

TRANSFER IMPEDANCE OF CAPACITIVE ELECTRODES AND INSULATED WIRES ON THE GROUND SURFACE

Nikita I. Zorin^{1✉}, Alexey A. Bobachev²

¹ Nord-West Ltd., Moscow, Russia; nikita.zorin.geophys@gmail.com

² Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; bobachev@gmail.com

Abstract. The article presents corrected for the edge effects formula for the capacitance of a thin disk over a conducting plane, and offers a number of generalized expressions for assessing the transfer impedance of capacitive electrodes over ground with finite conductivity. It is shown that the transfer impedance of an insulated wire on the ground in a wide frequency range is described by the Cole–Cole formula with an exponent parameter from 0.9 to 1.

Key words: disc capacitance, grounding resistance, contact impedance

For citation: Zorin N.I., Bobachev A.A. Transfer impedance of capacitive electrodes and insulated wires on the ground surface. *Moscow University Geol. Bull.* 2022; 4: 138–148. (In Russ.).

Введение. Емкостной способ возбуждения и приема электрического поля в земле был предложен почти полвека назад и с тех пор активно применяется в низкочастотной электроразведке [Тимофеев, 1974; Нахабцев и др., 1985; Grard, Tabbagh, 1991; Shima et al., 1996; Dashevsky et al., 2005; Kuras et al., 2006; Przyklenk et al., 2016; Gruzdev et al., 2020; Shlykov et al., 2020]. Кроме того, паразитные емкостные эффекты могут сильно искажать результаты измерения электрического поля обычными гальваническими приемными линиями, особенно при работе в условиях плохих заземлений электродов [Zonge, Hughes, 1985; Zorin, Yakovlev, 2021]. В связи с этим уточнение выражений, используемых для оценки величины переходного импеданса емкостных электродов и стелющихся линий, представляет собой актуальную научную задачу [Hordt et al., 2013].

Классический подход к расчету переходного импеданса Z емкостного электрода предполагает, что сопротивление земли стекающему с него току пренебрежимо мало. В этом случае $Z = 1/i\omega C$, где i — мнимая единица, ω — круговая частота, а C — емкость, которая для наиболее простых моделей может быть выражена аналитически [Kuras et al., 2006]. Однако в некоторых ситуациях удельное сопротивление земли также начинает влиять на переходный им-

педанс емкостного электрода, в результате чего его зависимость от частоты может заметно отклоняться от формулы вида $Z = 1/i\omega C$, и для корректного расчета импеданса приходится прибегать к численным методам [Hordt et al., 2013]. Ниже мы приводим ряд простых аналитических формул, позволяющих получить приближенные оценки величины и частотной зависимости переходного импеданса различных типов емкостных электродов на земле с конечной удельной проводимостью.

Материалы и методы исследований. Сопротивление заземления гальванических электродов.

Рассмотрим заземленную электрическую линию AB , на вход которой подается напряжение ΔU_{AB} . Протекающий через нее ток равен $I_{AB} = \Delta U_{AB}/R_{AB}$, где R_{AB} называют переходным сопротивлением или сопротивлением заземления линии AB . Как правило, падением напряжения внутри медных проводов и металлических электродов можно пренебречь, поэтому $\Delta U_{AB} = U_A - U_B$, где U_A и U_B — потенциалы электрического поля на поверхности электродов A и B соответственно. Если размеры электродов много меньше расстояния между ними, потенциал каждого из них не зависит ни от этого расстояния, ни от параметров другого электрода и, следовательно, равен потенциалу аналогичного уединенного электрода.

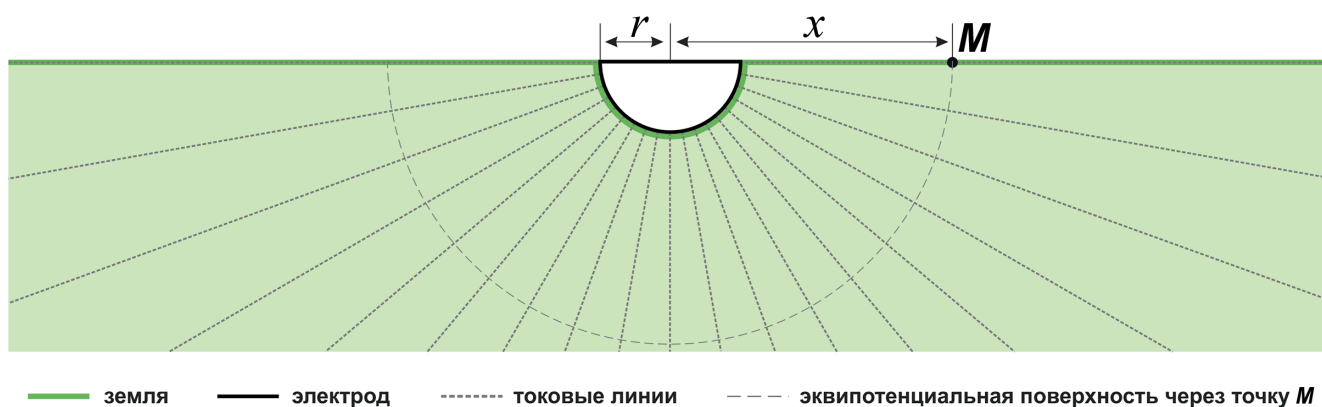


Рис. 1. Иллюстрация к выводу формулы для сопротивления заземления полусферического электрода

Таким образом, при условии, что расстояние между электродами многократно превышает их размеры $R_{AB} = R_A + R_B$, где $R_A = U_A/I_A$ и $R_B = U_B/I_B$ — сопротивления заземления уединенных электродов A и B соответственно (здесь и далее направление тока, стекающего с уединенного электрода, принимается за положительное).

Переходное сопротивление уединенного полусферического электрода радиуса r в среде с удельным электрическим сопротивлением (УЭС) ρ может быть найдено следующим образом. В силу сферической симметрии (рис. 1) в любой точке M земной поверхности, удаленной от центра электрода на расстояние $x \geq r$, электрический ток направлен строго радиально и характеризуется плотностью $j = I/2\pi x^2$. Согласно закону Ома, электрическое поле в данной точке направлено точно так же и имеет напряженность $E = jr = Ir/2\pi x^2$. Потенциал U в точке M однозначно определяется из уравнения $E = -\text{grad}(U) = -dU/dx$ и граничного условия $U(\infty) = 0$, откуда $U(x) = Ir/2\pi x$. Таким образом, переходное сопротивление полусферического электрода равно $R = U(r)/I = \rho/2\pi r$.

Расчет сопротивления заземления электродов несферической формы представляет собой более сложную проблему [Ollendorf, 1928; Wait, 1982]. Для ее решения удобно пользоваться методами и готовыми результатами хорошо развитой теории электростатики, задачи которой имеют прямую математическую аналогию с задачами о распределении постоянного тока. В частности, используя эту аналогию, несложно показать [Smythe, 1950, §6.14; Бурсиан, 1972, §6], что сопротивление заземления произвольного электрода, помещенного в однородное полупространство с УЭС (ρ), равно

$$R = \frac{2\rho\epsilon}{C} = \rho K, \quad (1)$$

где C — емкость электрода той же формы (дополненного вверх симметричным отражением его заземленной части) в однородном пространстве с диэлектрической проницаемостью ϵ .

Таким образом, сопротивление заземления любого гальванического электрода прямо пропорцио-

нально удельному сопротивлению среды, в которую он помещен. При этом геометрический коэффициент заземления K зависит только от конфигурации соприкасающейся с электродом области земной поверхности (чем меньше характерные размеры этой области, тем больше величина K). Из полученной ранее формулы переходного сопротивления заземленной полусферы следует, что для полусферического электрода радиуса r геометрический коэффициент заземления равен

$$K_{\text{пс}}(r) = \frac{1}{2\pi r}. \quad (2)$$

Для электродов более сложной формы значение K удобно определять с помощью применения формулы (1) к известным решениям соответствующих задач электростатики. Так, емкость уединенного диска, представленного в виде бесконечно сплюснутого сфероида [Landau, Lifshitz, 1960, §4] или цилиндра [Falco et al., 2003], равна $8\epsilon r$, откуда для прижатого к земной поверхности дискового электрода радиуса r получаем

$$K_{\text{д}}(r) = \frac{1}{4r}. \quad (3)$$

Аналогично емкость сильно вытянутого сфероида [Landau, Lifshitz, 1960, §4] или цилиндра [Jackson, 2000] равна $2\pi\epsilon l/\ln(l/r)$, откуда можно получить следующие оценки значения K для прижатого к земле оголенного провода радиуса r и длины $l \gg r$:

$$K_{\text{п}}(r, l) = \frac{1}{\pi l} \ln\left(\frac{l}{r}\right), \quad (4)$$

а также для классического штыревого электрода с радиусом r и длиной заземленной части $l \gg r$:

$$K_{\text{ш}}(r, l) = \frac{1}{2\pi l} \ln\left(\frac{2l}{r}\right). \quad (5)$$

В заключение заметим, что сопротивление заземления уединенного электрода практически не зависит от свойств среды вне его ближайшей

окрестности, сопоставимой с характерными размерами самого электрода [Бурсиан, 1972, §8; Kaufman, Anderson, 2010, §2.10]. Таким образом, все приведенные выше выражения применимы не только к однородному полупространству, но и к реальным геологическим средам с достаточно однородным верхним слоем (разумеется, при условии обеспечения плотного контакта пород этого слоя со всей рабочей поверхностью электрода).

Переходный импеданс емкостных электродов.

Рассмотрим теперь линию AB , подключенную к емкостным (т. е. расположенным близко к земле, но не имеющим с ней прямого гальванического контакта) электродам. Протекающий через нее ток равен $I_{AB} = \Delta U_{AB}/Z_{AB}$, где $Z_{AB} = Z_A + Z_B$ называют переходным импедансом линии AB , а $Z_A = U_A/I_A$ и $Z_B = U_B/I_B$ — переходным импедансом уединенных электродов A и B соответственно.

Формула для расчета переходного импеданса уединенного емкостного электрода над идеально проводящим полупространством имеет следующий вид [Kuras et al., 2006]:

$$Z = \frac{1}{i\omega C}. \quad (6)$$

Значение емкости электрода C определяется конфигурацией системы электрод–земля и в некоторых случаях может быть выражено аналитически. В качестве первого (не встречающегося на практике, но простого и наглядного) примера возьмем вдавленный в землю полусферический электрод радиуса r , покрытый слоем изоляции толщиной d . При очень малых значениях d емкость такого электрода равна половине емкости соответствующего сферического конденсатора

$$C_{\text{ис}}(r, d, \varepsilon) = \frac{2\pi r^2 \varepsilon}{d}, \quad (7)$$

где ε — диэлектрическая проницаемость изолирующего слоя.

Емкость дискового электрода радиуса r , расположенного над землей на малой высоте h , принято оценивать по классической формуле плоского конденсатора [Kuras et al., 2006; Nordt et al., 2013]:

$$C_d(r, h) = \frac{\pi r^2 \varepsilon_0}{h}, \quad (8a)$$

где ε_0 — диэлектрическая проницаемость воздуха (вакуума). Это выражение не учитывает влияние краевых эффектов. Более точная формула для тонкого диска конечных размеров при $k=h/r \ll 1$ может быть записана следующим образом (см. Приложение):

$$C_d^*(r, h) = \frac{\pi r^2 \varepsilon_0}{h} \left[1 + \frac{4k}{\pi} (k - \ln ek) \right]. \quad (8b)$$

Из приведенных выражений следует, что в общем случае $C_d^* > C_d$, однако различие между этими двумя оценками уменьшается по мере приближения диска к земле и при $k \rightarrow 0$ стремится к нулю. В наиболее важном с практической точки зрения диапазоне k от 1/5 до 1/50 формула (8b) дает среднее значение $C_d^* \rightarrow 1,15 C_d$, что прекрасно согласуется с известными численными оценками влияния краевых эффектов на емкость элементарной тонкой пластины над проводящей плоскостью [Sakurai, Tamaru, 1983; Kuras et al., 2006].

Наконец, емкость тонкого длинного провода радиуса r , поднятого над землей на небольшую по сравнению с его длиной (l) высоту (h), равна [Smythe, 1950, §4.14]

$$C_{\text{п}}(r, l, h) = \frac{2\pi l \varepsilon_0}{\operatorname{arcosh}\left(\frac{h}{r}\right)}. \quad (9)$$

Поправка за сопротивление земли. Поскольку УЭС земли пренебрежимо мало по сравнению с эффективным удельным сопротивлением воздуха, то можно считать, что весь ток с емкостного электрода стекает в землю и уже по земле распространяется на «бесконечность». Если при этом область S земной поверхности, через которую ток попадает в нижнее полупространство, близка к эквипотенциальной, то переходный импеданс электрода распадается на сумму реактивного сопротивления воздуха и гальванического сопротивления земли. Так как последнее имеет форму (1), обобщенное выражение (6) для импеданса емкостного электрода над полупространством с удельным сопротивлением ρ естественно искать в виде

$$Z = \frac{1}{i\omega C} + \rho G. \quad (10)$$

Величина G играет роль геометрического коэффициента «заземления» емкостного электрода и, следовательно, определяется конфигурацией области S (чем меньше ее характерные размеры, тем больше величина G). По мере приближения электрода к земле его емкость увеличивается, а размеры области S уменьшаются, что приводит к увеличению относительного вклада поправочного слагаемого ρG . Подчеркнем при этом, что S в общем случае не всегда можно считать эквипотенциальной поверхностью, поэтому представление импеданса в форме (10) с независимыми от частоты параметрами C и G — лишь удобное первое приближение, точность которого для каждого типа электродов следует проверять отдельно с помощью аналитических или численных оценок.

Как правило, активное сопротивление земли вносит незначительный вклад в общую величину переходного импеданса, и им принято пренебрегать [Shima et al., 1996; Kuras et al., 2006]. Однако

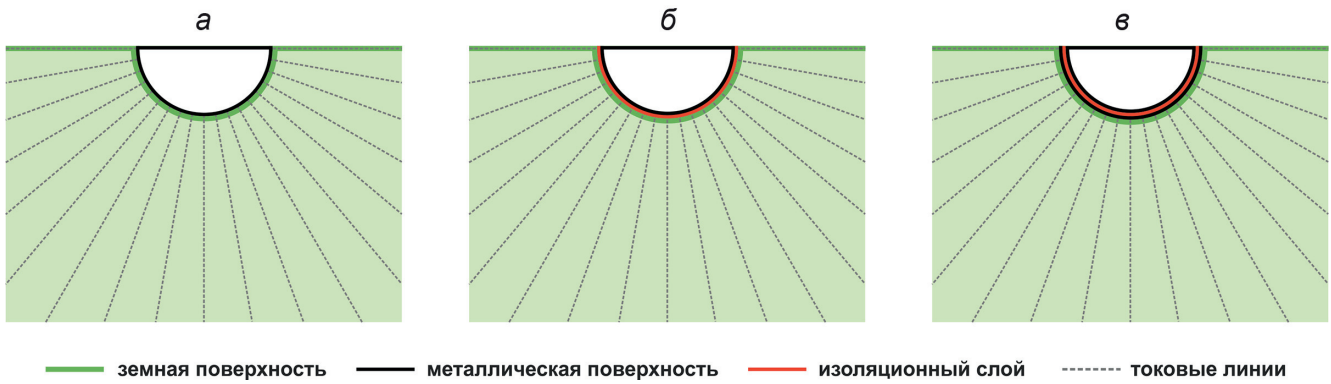


Рис. 2. Схема мысленного эксперимента с полусферическим электродом. Буквами обозначены модели: заземленного электрода (а), емкостного электрода (б) и эквивалентная ей модель заземленного конденсатора (в)

в некоторых случаях оно может достигать и даже превышать реактивное сопротивление воздуха, что легко показать с помощью следующего мысленного эксперимента. Рассмотрим еще раз полусферический электрод радиуса r , заземленный в однородном проводящем полупространстве с УЭС ρ (рис. 2, а). Как было показано ранее, его переходное сопротивление равно $R = \rho/2\pi r$. Теперь извлечем электрод из земли, нанесем на его поверхность изоляционный слой толщины $d \ll r$, и поместим обратно в землю (рис. 2, б). Применение формул (6, 7) для оценки импеданса получившегося емкостного электрода дает $Z_{\text{ПС}} = d/2\pi r^2 i\omega\epsilon$, что при $\rho \neq 0$ не может быть верно, поскольку приводит к парадоксальным результатам. Действительно, при очень малых d величина $d/2\pi r^2 i\omega\epsilon$ стремится к нулю, откуда следовало бы, что нанесение достаточно тонкого слоя изоляции на заземленный электрод не увеличивает, а, наоборот, уменьшает его переходное сопротивление.

Для корректной оценки $Z_{\text{ПС}}$ заменим рассматриваемую модель электрода эквивалентной моделью погруженного в землю полусферического конденсатора (рис. 2, в). При малых d емкость такого конденсатора равна $d/2\pi r^2 \epsilon = C_{\text{ПС}}(r, d, \epsilon)$, сопротивление заземления внешней обкладки в соответствии с формулами (1,2) равна $\rho K_{\text{ПС}}(r + d) \approx \rho K_{\text{ПС}}(r)$, откуда для полного импеданса цепи окончательно получаем:

$$Z_{\text{ПС}} = \frac{1}{i\omega C_{\text{ПС}}(r, d, \epsilon)} + \rho K_{\text{ПС}}(r). \quad (11)$$

Заметим, что этот же результат можно получить, воспользовавшись выражением для переходного сопротивления полусферического электрода радиуса r , окруженного концентрическим слоем с УЭС ρ_1 и толщиной d [Бурсиан, 1972, §8; Wait, 1982]:

$$R = \frac{\rho_1 d}{2\pi r(r + d)} + \frac{\rho}{2\pi(r + d)}. \quad (12)$$

Действительно, с учетом того, что в рассматриваемой модели $d \ll r$, подстановка эффективного удельного сопротивления изолятора $\rho_1 = (i\omega\epsilon)^{-1}$ в формулу (12) дает (11).

Найдем теперь обобщенное выражение для переходного импеданса $Z_{\text{П}}$ поднятого на высоту h над землей тонкого длинного провода с радиусом $r \ll h$ и длиной $l \gg h$. Для этого сначала положим, что УЭС земли ρ совпадает с эффективным удельным сопротивлением воздуха $\rho_0 = 1/i\omega\epsilon_0$, т.е., что провод расположен в пустом пространстве, и рассмотрим поведение потенциала U_0 на расстоянии $x \ll l$ от оси провода при стекании с него тока I . В силу цилиндрической симметрии (рис. 3, а) в любой точке M , удаленной от оси провода на расстояние $x \geq r$, плотность тока равна $j_0 = I/2\pi l x$, откуда $E_0 = I \rho_0 / 2\pi l x$. Потенциал в точке M однозначно определяется из уравнения $E_0 = -dU_0/dx$ и граничного условия $U_0(r) = I/i\omega C = (I\rho_0/2\pi l)\ln(l/r)$, где $C = 2\pi\epsilon_0 l/\ln(l/r)$ — уже приводившееся ранее значение емкости длинного провода в вакууме, откуда $U_0(x) = (I\rho_0/2\pi l)\ln(l/x)$.

Вернемся к исходной задаче, в которой $\rho \ll \rho_0$. Скачкообразное изменение удельного сопротивления среды на границе воздух–земля приводит к тому, что на ней появляются вторичные заряды, изменяющие структуру электрического поля в воздухе (рис. 3, б). Для определения величины вызванного этими зарядами добавочного потенциала ΔU на поверхности провода воспользуемся методом зеркальных отражений, в соответствии с которым [Grard, Tabbagh, 1991; Kaufman, Anderson, 2010, §3.6]

$$\Delta U = \frac{\rho - \rho_0}{\rho + \rho_0} U_0(2h) = \left[\frac{2\rho}{\rho + \rho_0} - 1 \right] \frac{I\rho_0}{2\pi l} \ln \frac{l}{2h}. \quad (13)$$

Поскольку $(\rho + \rho_0) \approx \rho_0 = 1/i\omega\epsilon_0$, то полный потенциал провода $U_{\text{П}}$ равен

$$U = U_0(r) + \Delta U = \frac{I}{i\omega 2\pi l \epsilon_0} \ln \frac{2h}{r} + \frac{I\rho}{\pi l} \ln \frac{l}{2h}. \quad (14)$$

Так как $\ln(2h/r) \approx \text{arcosh}(h/r)$, то с учетом (4), (6) и (9) окончательно получаем

$$Z_{\text{П}} = \frac{U_{\text{П}}}{I} = \frac{1}{i\omega C_{\text{П}}(r, l, h)} + \rho K_{\text{П}}(2h, l). \quad (15)$$

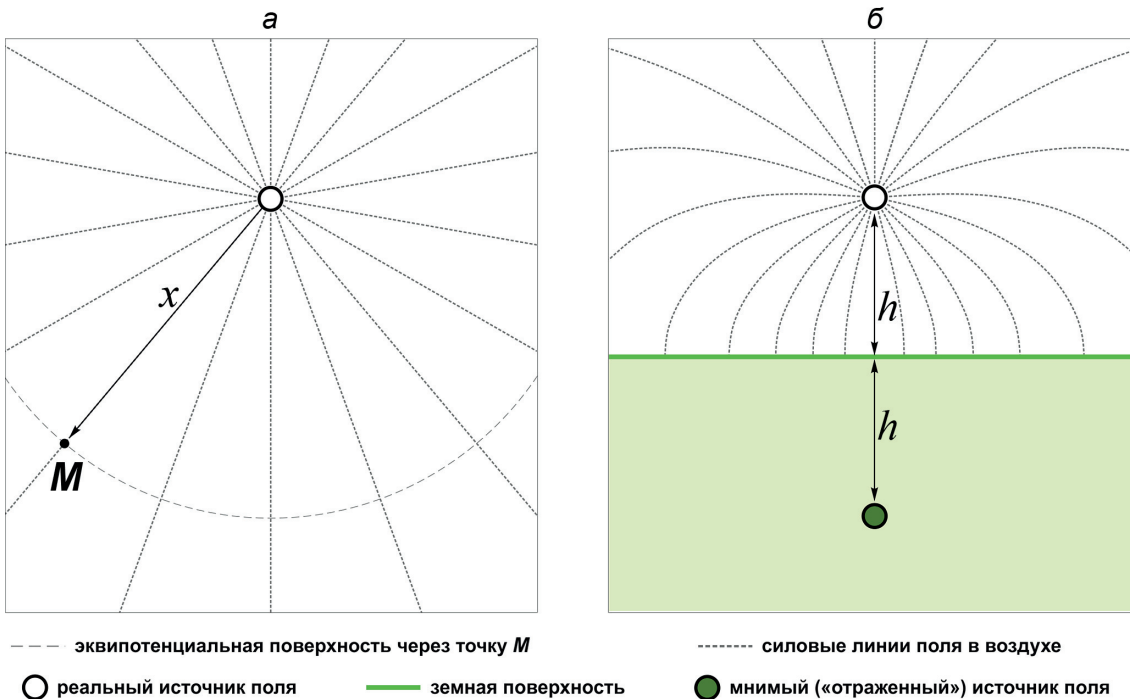


Рис. 3. Иллюстрация к выводу формулы для переходного импеданса поднятого над землей тонкого длинного провода. Пояснения см. в тексте

В заключение попробуем определить коэффициенты формулы (10), наилучшим образом подходящие для переходного импеданса Z_D тонкого диска радиуса r , поднятого на высоту $h = kr$ над землей с удельным сопротивлением ρ . Для этого заметим, что при исчезающе малых значениях k искомая формула должна удовлетворять следующим предельным условиям: $Z_D = 1/i\omega C_D(r, h)$ при $\rho \rightarrow 0$ и $Z_D = K_D(r)\rho$ при $h \rightarrow 0$, откуда

$$Z_D = \frac{1}{i\omega C_D(r, h)} + \rho K_D(r). \quad (16a)$$

Формула (16a) может быть естественным образом обобщена на случай $0 \leq k \ll 1$ с помощью замены C_D на C_D^* и r на r^* :

$$Z_D^* = \frac{1}{i\omega C_D^*(r, h)} + \rho K_D(r^*). \quad (16b)$$

где $r^* = \sqrt{C_D^*/C_D}$ — эффективный радиус площадки S , через которую ток, стекающий с обеих сторон поднятого в воздух дискового электрода, попадает в землю.

Численное моделирование. Для оценки точности формулы (16b) выполнено численное моделирование в программе Disc5 (П. Вайдельт), позволяющей рассчитать значение переходного импеданса тонкого диска радиуса R , поднятого на произвольную высоту h над землей с эффективным удельным сопротивлением $\rho = \rho_{DC}/(1 + i\omega\epsilon\rho_{DC})$ [Hordt et al., 2013]. Результаты моделирования для $R = 0,2$ м и различных значений ρ_{DC} , ϵ и h приведены на рис. 4. Сплошной красной линией на рисунке показаны кривые модуля импеданса, полученные с помощью программы Disc5; черным пунктиром — результаты применения классической формулы плоского конденсатора (6,

8a); наконец, черной штриховой линией показаны результаты применения модифицированной формулы (16b) для диска над землей с эффективным удельным сопротивлением $\rho = \rho_{DC}/(1 + i\omega\epsilon\rho_{DC})$.

Первая серия графиков (рис. 4, а–в) позволяет сравнить поведение $|Z_D^*|$ для разных значений $\rho_{DC} = 1$ кОм, 10 кОм, 100 кОм. Как видно на рис. 4 (а–в), левые ветви всех кривых лежат на асимптоте $1/\omega C_D^*(r, h)$, однако начиная с некоторого момента графики выполаживаются, практически переставая убывать с частотой. Это свидетельствует о том, что первое слагаемое в формуле (16b) становится меньше второго, и величина Z_D^* начинает определяться не реактивным сопротивлением системы электрод–земля, а гальваническим сопротивлением нижнего полупространства, которое при $\rho \approx \rho_{DC}$ не зависит от частоты. Так как отношение второго слагаемого к первому пропорционально произведению $\omega\rho$, то увеличение ρ_{DC} модели в 10 раз ожидаемо приводит к тому, что график $|Z_D^*|$ отклоняется от низкочастотной асимптоты на декаду раньше (рис. 4, б, в). При дальнейшем увеличении частоты, рано или поздно, в земле начинают преобладать токи смещения: $\rho \approx 1/i\omega\epsilon$, вследствие чего графики импеданса выходят на свою правую асимптоту, также обратно пропорциональную частоте. Важно отметить, что все кривые, полученные по формуле (16b), практически совпадают с результатами соответствующих численных расчетов за исключением высокочастотных асимптот, где они дают немного завышенные значения, причины чего рассмотрим ниже.

Вторая серия графиков (рис. 4, г–е) позволяет сравнить поведение $|Z_D^*|$ для разных значений ϵ : $10\epsilon_0$, $3\epsilon_0$, ϵ_0 . Как видно на рис. 4 (г–е), чем меньше ϵ , тем ниже точность оценки величины импеданса в области самых высоких частот. Это связано с нарушением используемого в обобщенной формуле

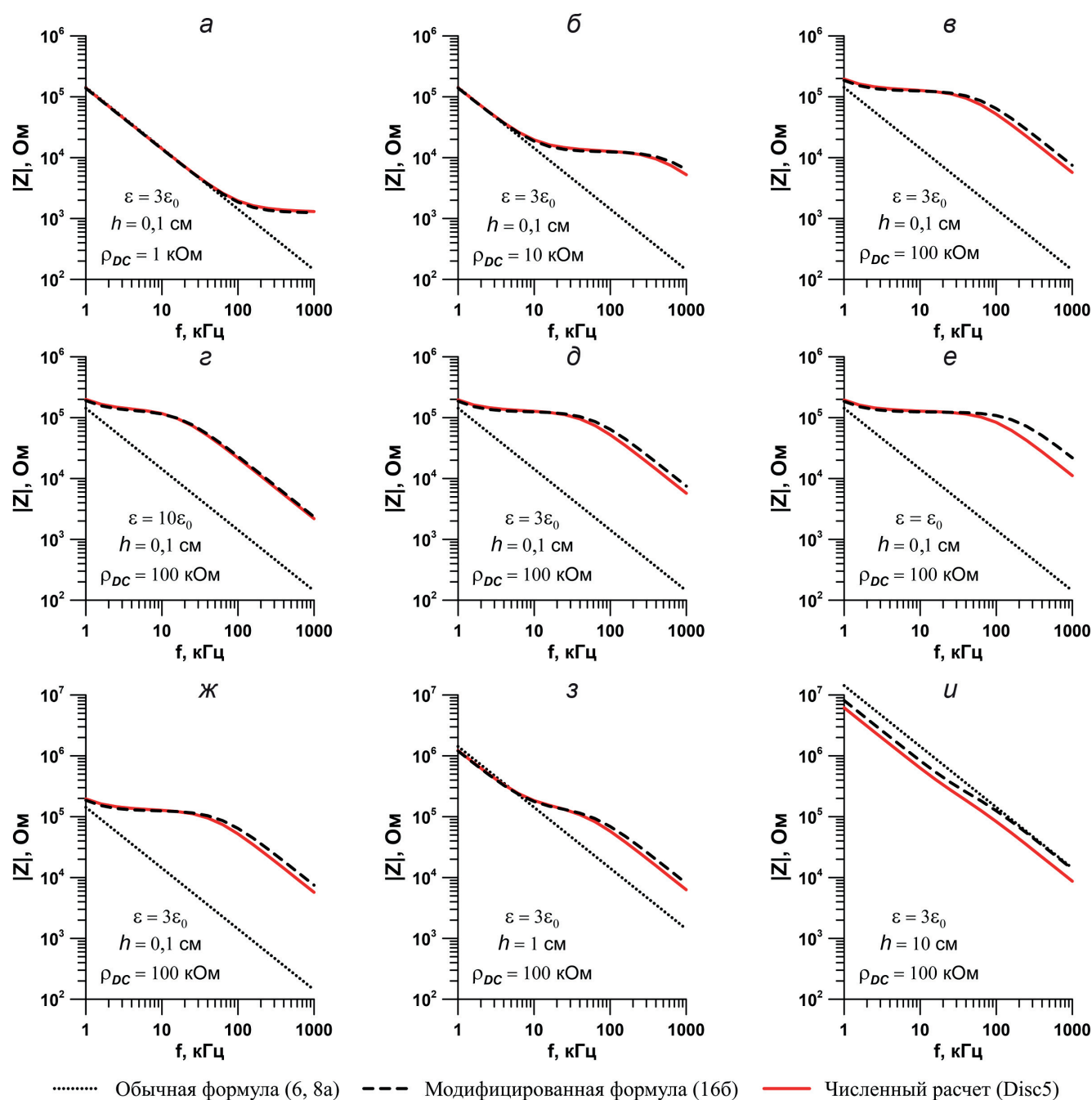


Рис. 4. Сравнение классической и модифицированной формул для оценки переходного импеданса дискового электрода с численными расчетами в программе Disc5 (П. Вайдельт). Электрические свойства нижнего полупространства и высота электрода над ним указаны на рисунке, радиус электрода во всех случаях равен 20 см. Пояснения см. в тексте

(10) условия $\rho \ll \rho_0$, которое для верхних частот эквивалентно условию $\varepsilon \gg \varepsilon_0$. При $\varepsilon \sim \varepsilon_0$ часть тока распространяется на «бесконечность» прямо по воздуху, тем самым снижая фактическое значение контактного импеданса. Однако, как следует из рис. 4, для большинства реальных горных пород с ε около $10 \varepsilon_0$ этот эффект не приводит к значительным искажениям.

Третья серия графиков (рис. 4, ж–и) наглядно подтверждает сделанный ранее вывод о том, что отличие частотной зависимости импеданса емкостного электрода от формулы (6) тем больше, чем ближе

электрод к земле. Кроме того, она позволяет оценить практические границы выполнения условия $k = h/R \ll 1$ для формул (6, 8a) и (166). При $h = 0,1$ см ($k = 0,005$) в области низких частот обе формулы практически совпадают с численными расчетами. При $h = 1$ см ($k = 0,05$) левая асимптота для формулы (166) остается верной, в то время как для не учитывающей краевые эффекты формулы (8a) она оказывается завышенной на ~15%. Наконец, при $h = 10$ см ($k = 0,5$) применение любых оценок, основанных на условии $k \ll 1$, дает значительно (>30%) завышенные значения импеданса во всем диапазоне частот.

Таким образом, предложенный в статье подход к оценке и учету влияния конечной проводимости земли на переходный импеданс дискового электрода полностью согласуется с результатами численного моделирования.

Емкостные электроды с распределенными параметрами. Отдельный интерес с точки зрения влияния сопротивления земли на переходный импеданс емкостных электродов представляют системы с распределенными параметрами, к которым, например, относятся стелющиеся линии [Вешев, 1980, §3.2]. Если импеданс Z_i каждого элементарного участка такой линии описывается формулой $Z_i = 1/i\omega C_i + R_i$, где C_i — емкость i -го участка провода, а R_i — гальваническое сопротивление соответствующей ему области нижнего полупространства, то полный импеданс провода будет равен

$$Z = \left(\sum_i \frac{i\omega C_i}{1 + i\omega R_i C_i} \right)^{-1}. \quad (17)$$

С помощью вспомогательных переменных $\tilde{R} = 1/\sum_i R_i^{-1}$, $\gamma_i = \tilde{R}/R_i$ и $\tau_i = R_i C_i$ формулу (17) удобно переписать в следующем виде:

$$Z = \tilde{R} \left(\sum_i \gamma_i \frac{i\omega \tau_i}{1 + i\omega \tau_i} \right)^{-1}, \quad (18a)$$

$$\sum_i \gamma_i = 1. \quad (18b)$$

Теперь в приведенном в скобках выражении несложно узнать ядро дискретного варианта обобщенной формулы Дебая (дебаевской декомпозиции), широко использующейся в современной электроразведке методом вызванной поляризации [Patella, 2003; Nordsiek, Weller, 2008; Zorin, 2015]. Важная особенность дебаевской декомпозиции — она представляет собой наиболее общую из всех возможных форм представления частотных характеристик релаксационных систем [Shuey, Johnson, 1973] и во многих практических случаях может быть заменена более простыми эмпирическими и полуэмпирическими моделями [Pelton et al., 1983]. Самый известный пример такой модели — формула Коула–Коула [Cole, Cole, 1941], применение которой к выражению (18) дает следующую оценку переходного импеданса стелющейся линии:

$$Z = \tilde{R} \left(\frac{(i\omega \tau_0)^\alpha}{1 + (i\omega \tau_0)^\alpha} \right)^{-1} = \frac{\tilde{R}}{(i\omega \tau_0)^\alpha} + \tilde{R}. \quad (19)$$

где среднее значение величины τ_i характеризуется постоянной времени τ_0 , а дисперсия ее распределения — отклонением от единицы параметра $\alpha \in [0; 1]$. В случае если $\omega \tau_0 \ll 1$ формула (19) дополнительно упрощается отбрасыванием второго слагаемого и введением дополнительного обозначения $X = \tau_0 \tilde{R}^{-1/\alpha}$,

более удобного для описания импеданса элемента Коула–Коула [Pelton et al., 1983], откуда:

$$Z = \frac{1}{(i\omega X)^\alpha}. \quad (20)$$

Результаты исследований и их обсуждение.

Полевые измерения. Выше показано, что переходный импеданс реальной стелющейся линии на неоднородной земной поверхности лучше описывается с помощью элемента Коула–Коула, а не простого конденсатора. Для проверки этого утверждения в мае 2021 г. на Александровском геофизическом полигоне МГУ имени М.В. Ломоносова [Aleksanova et al., 2018] был проведен следующий полевой эксперимент.

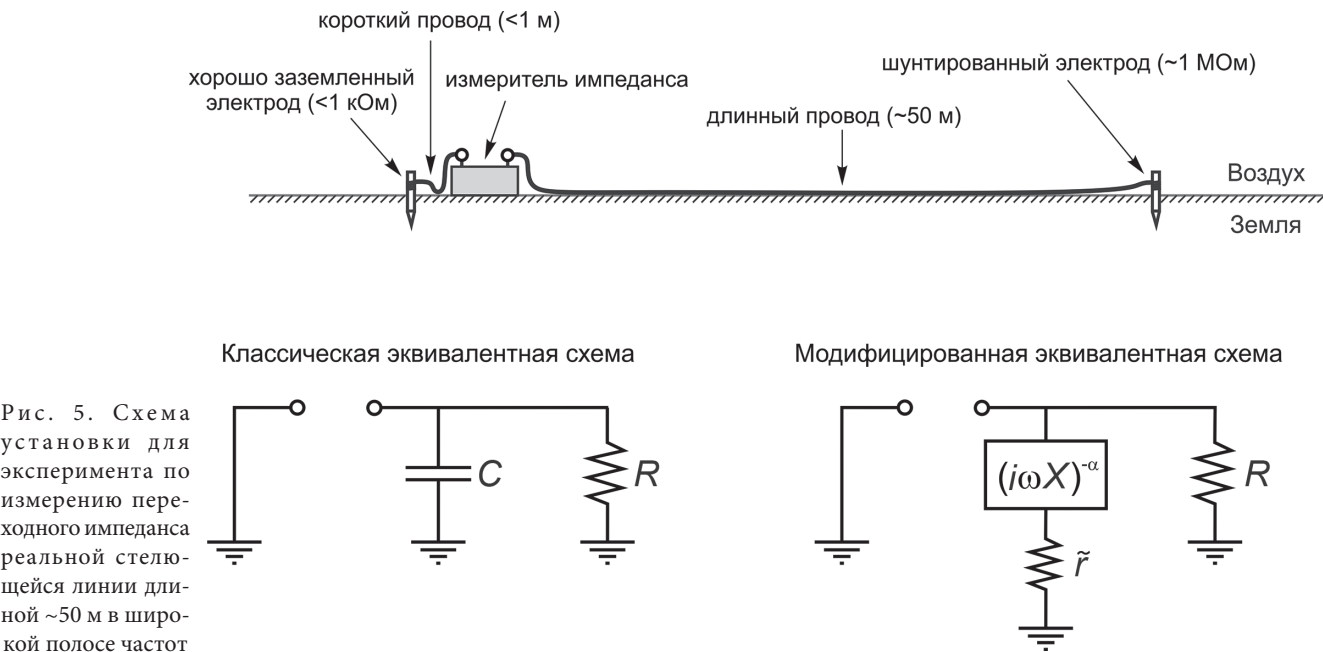
На покрытом короткой травой участке поля с удельным сопротивлением почвы около 0,5 кОм·м была разложена установка, схема которой приведена на рис. 5. К одной из клемм измерителя импеданса подключена стелющаяся линия, представляющая собой 50-метровый отрезок изолированного медного провода, заземленного на дальнем конце через резистор номиналом $R_0 = 1$ МОм. Вторая клемма заземлена в непосредственной близости от прибора без какого-либо добавочного резистора (сопротивление заземления второго электрода < 1 кОм, поэтому его влиянием на переходный импеданс всей установки можно пренебречь). Чтобы исключить возможные гальванические утечки через микроповреждения изоляции, отрезок провода стелющейся линии был для чистоты эксперимента взят из новой упаковки. В качестве измерителя использовался электроразведочный регистратор NORD (ООО «Северо-Запад»), позволяющий проводить широкополосную оценку переходного импеданса подключенных линий с погрешностью менее 1% амплитуды и 1° фазы в диапазоне значений от 1 кОм до 1 МОм.

Классическая эквивалентная схема [Zonge, Hughes, 1985] для используемой в эксперименте установки приведена в левом нижнем углу рис. 5. В этой схеме емкостная утечка электрического тока с провода моделируется с помощью идеального конденсатора, и эффективный контактный импеданс всей линии принимает вид

$$Z = R_0 \frac{1}{1 + i\omega R_0 C}. \quad (21)$$

Модифицированная эквивалентная схема приведена в правом нижнем углу рис. 5. В ней конденсатор заменен на элемент Коул–Коул и добавлено сопротивление $\tilde{R}$ земли стекающему с провода емкостному току, что дает следующую формулу импеданса:

$$Z = R_0 \frac{1 + \tilde{R}(i\omega X)^\alpha}{1 + (R_0 + \tilde{R})(i\omega X)^\alpha}. \quad (22)$$



Полевой эксперимент проходил в сухую облачную погоду при температуре 15–20 °С и состоял из трех многочастотных измерений переходного импеданса Z , которые затем по очереди аппроксимировали с помощью формул (21) или (22). Перед первым измерением разложенную на траве стелющуюся линию притоптали ногами, в результате чего среднее расстояние от провода до земли составило около 1–2 см. Перед вторым измерением провод линии был дополнительно пролит пресной водой для симуляции работы в мокрую погоду. Наконец, перед третьим измерением стелющаяся линия была закопана в землю на небольшую (до 5 см) глубину,

это распространенная практика при полевых работах методом магнитотеллурического зондирования [Chave, Jones, 2012, §9.2].

Результаты аппроксимации полученных данных с помощью классической формулы (21) приведены на рис. 6. Первое, что бросается в глаза, — сильная зависимость величины емкостной утечки от условий проведения эксперимента. Так, подобранные значения эффективной емкости стелющейся линии составляют ~2 нФ для сухого провода, ~4 нФ для мокрого и ~20 нФ для прикопанного. Интересно, что с учетом параметров используемого провода формула (9) дает предельно достижимые значения

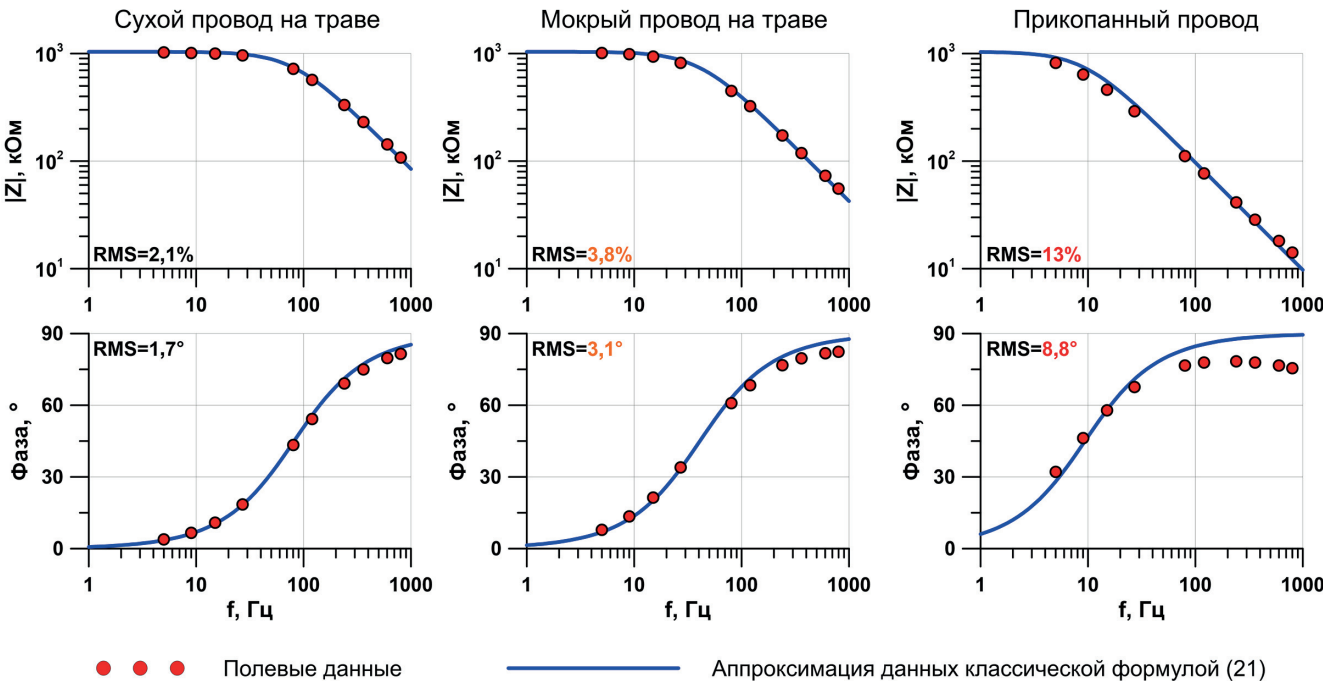


Рис. 6. Результаты аппроксимации измеренных данных с помощью эквивалентной схемы, в которой емкостная утечка с провода моделируется идеальным конденсатором

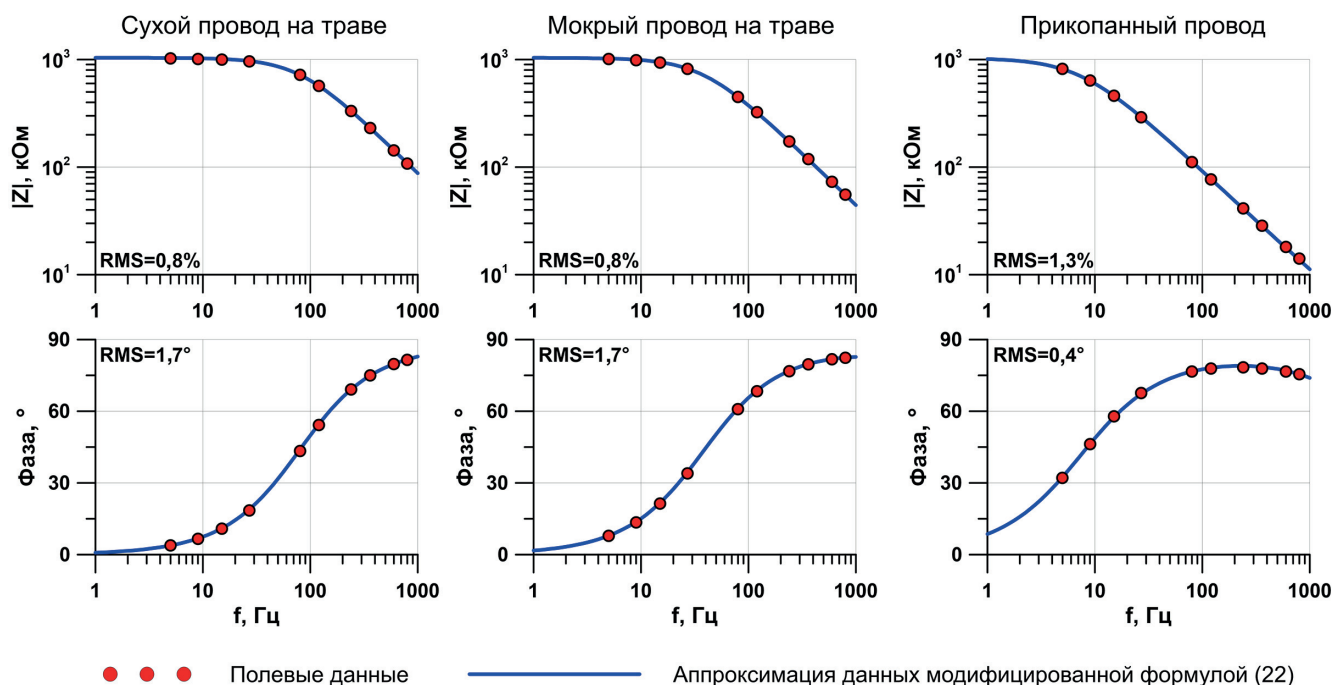


Рис. 7. Результаты аппроксимации измеренных данных с помощью эквивалентной схемы, в которой емкостная утечка с провода моделируется элементом Коула–Коула

емкости в 3–4 нФ. Из этого, в частности, следует, что для оценки емкости стелющихся линий по формуле (9) в мокрую погоду в качестве высоты h можно брать внешний радиус провода $(r + d)$, где d — толщина изоляции. Для оценки же емкости прикопанной линии вместо (9) следует использовать формулу цилиндрического конденсатора [Smythe, 1950, §2.04]:

$$C = \frac{2\pi L}{\ln \frac{r+d}{r}} \varepsilon_1. \quad (23)$$

которая дает лучше согласующиеся с экспериментом значения около 15–20 нФ.

Второй важный вывод из приведенных на рис. 6 данных заключается в том, что классическая формула (21) достаточно точно описывает только результаты эксперимента с сухим проводом на траве. Действительно, для мокрого провода рассчитанная невязка подбора превышает погрешность аппаратуры в несколько раз, а для прикопанного провода даже на порядок. Причина такого плохого подбора кривых заключается в том, что в последних двух тестах импеданс линии убывает с частотой заметно медленнее, чем $\sim 1/\omega$, что невозможно смоделировать в рамках классической схемы с одним конденсатором.

Результаты аппроксимации данных с помощью модифицированной формулы (22) приведены на рис. 7. Для всех измерений невязка подбора оказалась близка к погрешности аппаратуры, что свидетельствует в пользу корректности предложенной эквивалентной схемы. При этом полученные значения степенного параметра α для сухого, мокрого и прикопанного проводов составили $\sim 0,98$, $\sim 0,97$ и $\sim 0,93$ соответственно.

Заключение. В электроразведке принято считать, что переходный импеданс произвольного емкостного электрода представляет собой функцию вида $Z = 1/i\omega C$ с независимым от частоты коэффициентом C . Это утверждение основано на предположении о том, что сопротивление нижнего полупространства пренебрежимо мало. Во многих практических ситуациях такое предположение абсолютно оправдано, однако если электрод расположен близко к подстилающей среде (особенно в мокрую погоду), то ее сопротивление может вносить значительный вклад в переходный импеданс электрода. В таких случаях на графике зависимости модуля переходного импеданса от частоты появляются обширные участки, в пределах которых он убывает медленнее, чем $\sim 1/\omega$.

Для количественного описания указанных эффектов авторами предложен ряд приближенных формул для расчета переходного импеданса емкостных электродов над средой с известным удельным сопротивлением. В ходе этого исследования также получено уточненное за влияние краевых эффектов выражение для емкости тонкого диска над проводящей плоскостью. Наконец, показано, что для аппроксимации переходного импеданса реальных стелющихся линий корректнее использовать эквивалентные схемы с элементом Коула–Коула вместо идеального конденсатора.

Благодарности. Использованная в работе программа П. Вайдельта для численного расчета переходного импеданса дискового емкостного электрода Disc5 была любезно предоставлена А. Хордтом. Авторы также благодарны Н.Ю. Боброву и А.Н. Орехову за рецензирование рукописи и ценные замечания.

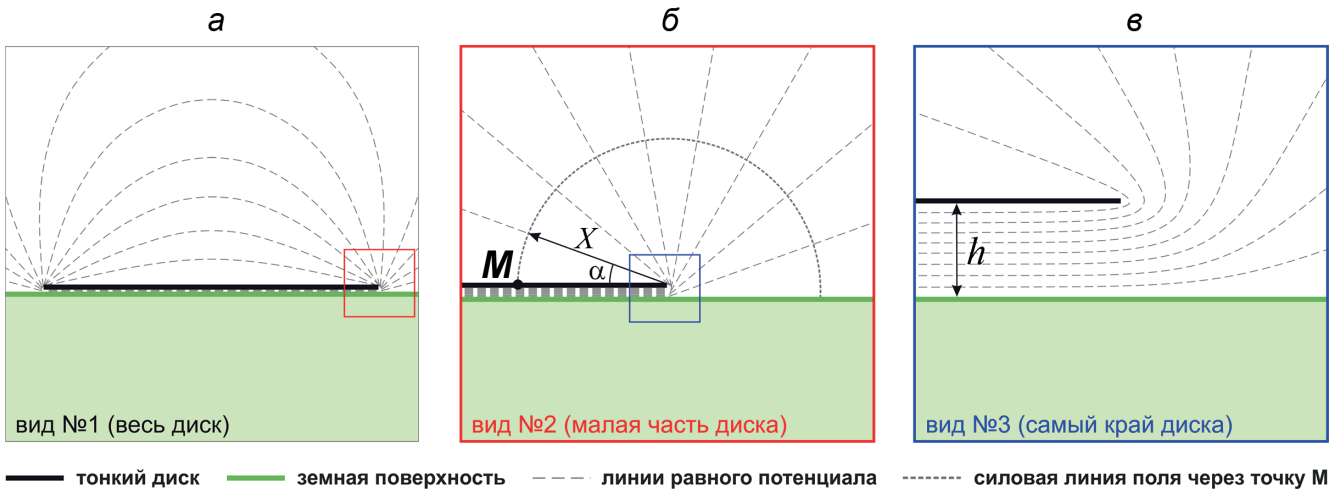


Рис. 8. Иллюстрация к выводу уточненной за влияние краевых эффектов формулы для емкости тонкого диска над проводящим полупространством. Пояснения см. в тексте

Приложение

Приведем вывод обычной (8а) и уточненной (8б) формул для емкости тонкого диска радиуса r , расположенного на малой высоте $h = kr$ над проводящим полупространством (землей). Для этого положим, что потенциал земли равен нулю, а потенциал дискового электрода равен Φ_D . По определению емкость диска равна $C_D = q / \Phi_D$, где q — полный индуцированный заряд на его поверхности.

Если пренебречь влиянием краевых эффектов, т. е. считать, что электрическое поле в воздухе однородно и существует только между диском и землей, то полный заряд диска q_0 распределен равномерно по его нижней поверхности, откуда $q_0 = \sigma_0 \pi r^2$, где σ_0 — поверхностная плотность заряда. Противоположный по знаку заряд земли $-q_0$ также распределен равномерно на участке дневной поверхности под диском и характеризуется плотностью σ_0 . Поскольку элементарный поверхностный заряд σ_0 приводит к появлению нормальной компоненты поля в воздухе $E_n = \sigma_0 / 2\epsilon_0$ [Kaufman, Anderson, 2010, §1.41], то полное поле над диском равно $\sigma_0 / 2\epsilon_0 - \sigma_0 / 2\epsilon_0 = 0$, а под диском — $E = \sigma_0 / 2\epsilon_0 + \sigma_0 / 2\epsilon_0 = \sigma_0 / \epsilon_0$. В силу однородности поля в любой точке между диском и землей $E = \Phi_D / h$, откуда $\sigma_0 = \Phi_D \epsilon_0 / h$, и для емкости C_D дискового электрода получаем формулу (8а):

$$C_D = \frac{q_0}{\Phi_D} = \frac{\sigma_0 \pi r^2}{\Phi_D} = \frac{\pi r^2 \epsilon_0}{h}. \quad (\text{П1})$$

Реальный дисковый электрод конечных размеров характеризуется краевыми эффектами, которые проявляются в том, что поле в воздухе существует не только под, но и над диском (рис. 8, а). Рассмотрим точку M на верхней стороне диска, отстоящую от его края на расстояние x (рис. 8, б). Существование нормальной компоненты электрического поля $E_n(x)$ прямо над диском свидетельствует о том, что на нем есть добавочный заряд Δq с плотностью $\Delta\sigma(x) = E_n(x) 2\epsilon_0$. Если не подходить близко к краю диска

(рис. 8, в), то его превышением над землей можно пренебречь, и задача по определению $E_n(x)$ сводится к определению поля у контакта двух плоских поверхностей с разными потенциалами. Как показано в [Landau, Lifshitz, 1960, §22], в такой модели силовые линии поля представляют собой дуги окружностей с центром в точке контакта, вдоль которых потенциал меняется по линейному закону. Проведя такую дугу через точку M (рис. 8, б), получаем, что

$$E_n(x) = -\frac{d\Phi(\alpha, x)}{dn(\alpha, x)} = \frac{\Phi_D}{\pi x} \frac{d\alpha}{d\alpha} = \frac{\Phi_D}{\pi x}, \quad (\text{П2})$$

откуда поверхностная плотность добавочного заряда в точке M равна

$$\Delta\sigma(x) = \frac{2\epsilon_0 \Phi_D}{\pi x}. \quad (\text{П3})$$

Для оценки Δq проинтегрируем $\Delta\sigma$ по всей поверхности диска, за вычетом тонкой полоски шириной h вдоль его края, где E_n заведомо не описывается уравнением (П2):

$$\begin{aligned} \Delta q &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r-h} \Delta\sigma(R-\tau) \tau d\tau d\theta = \\ &= 4\epsilon_0 \Phi_D \left(-r \ln \frac{h}{r} - r + h \right). \end{aligned} \quad (\text{П4})$$

Перепишем уравнение (П4) с помощью замены $h = kr$:

$$\Delta q = 4\epsilon_0 \Phi_D r (-\ln k - 1 + k) = 4\epsilon_0 \Phi_D r (k - \ln ek). \quad (\text{П5})$$

Наконец, разделив полный заряд диска $q = q_0 + \Delta q$ на его потенциал Φ_D , получаем уточненную за влияние краевых эффектов формулу емкости дискового электрода (8б):

$$C_D = \frac{q_0 + \Delta q}{\Phi_D} = \frac{\pi r^2 \epsilon_0}{h} \left[1 + \frac{4k}{\pi} (k - \ln ek) \right]. \quad (\text{П6})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Бурсиан В.Р. Теория электромагнитных полей, изменяемых в электроразведке. 2-е изд., испр. и доп. Л.: Недра, 1972. 368 с.
- Вешев А.В. Электропрофилирование на постоянном и переменном токе. 2-е изд., перераб. и доп. Л.: Недра, 1980. 391 с.
- Нахабцев А.С., Сапожников Б.Г., Яблучанский А.И. Электропрофилирование с незаземленными рабочими линиями. Л.: Недра, 1985. 96 с.
- Тимофеев В.М. Применение электропрофилирования с линейными емкостными антеннами для целей инженерно-геокриологической съемки: Автореф. канд. дисс. М., 1979.
- Aleksanova E., Kulikov V., Shustov N., Yakovlev A. Aleksandrovka geophysical field camp: a place for probing new EM technologies // Pap. presented at the 24th EM Induction Workshop, Helsingor, Denmark, 13–20 Aug., 2018.
- Chave A.D., Jones A.G. The magnetotelluric method: Theory and practice. Cambridge University Press, 2012. 584 p.
- Cole K.S., Cole R.H. Dispersion and absorption in dielectrics // J. Chem. Physics. 1941. Vol. 9. P. 341–351.
- Dashevsky Yu.A., Dashevsky O.Yu., Filkovsky M.I., Synakh V.S. Capacitance sounding: a new geophysical method for asphalt pavement quality evaluation // J. Applied Geophysics. 2005. Vol. 57. P. 95–106.
- Falco S., Panariello G., Schettino F., Verolino L. Capacitance of a finite cylinder // Electrical Engineering. 2003. Vol. 85. P. 177–182.
- Grard R., Tabbagh A. A mobile four-electrode array and its application to the electrical survey of planetary grounds at shallow depths // J. Geophys. Res. 1991. Vol. 96, B3. P. 4117–4123.
- Gruzdev A.I., Bobachev A.A., Shevnin V.A. Determining the field of application of the noncontact resistivity technique // Moscow University Geol. Bull. 2020. Vol. 75, N 6. P. 644–651.
- Hordt A., Weidelt P., Przyklenk A. Contact impedance of grounded and capacitive electrodes // Geophys. J. Intern. 2013. Vol. 193. P. 187–196.
- Jackson J.D. Charge density on thin straight wire, revisited // Amer. J. Physics. 2000. Vol. 68, N9. P. 789–799.
- Kaufman A.A., Anderson B.I. Principles of electric methods in surface and borehole geophysics. Elsevier Science, 2010. 456 p.
- Kuras O., Beamish D., Meldrum P.I., Ogilvy R.D. Fundamentals of the capacitive resistivity technique // Geophysics. 2006. Vol. 71, N 3. P. 135–152.
- Landau L.D., Lifshitz M.E. Electrodynamics of continuous media. London: Pergamon Press, 1960. 417 p.
- Nordsiek S., Weller A. A new approach to fitting induced-polarization spectra // Geophysics. 2008. Vol. 73, N 6. P. F235–F245.
- Ollendorf F. Erdströme. Grundlagen der Erdschlus (Earth Currents. Grounding Theory). Berlin: Springer, 1928. 264 p.
- Patella D. On the role of the J-E constitutive relationship in applied geoelectromagnetism // Ann. Geophysics. 2003. Vol. 46, N 3. P. 589–597.
- Pelton W.H., Sill W.R., Smith B.D. Interpretation of complex resistivity and dielectric data, Part I // Geophys. Transactions. 1983. Vol. 29, N 4. P. 297–330.
- Przyklenk A., Hordt A., Radic T. Capacitively coupled resistivity measurements to determine frequency-dependent electrical parameters in periglacial environment — theoretical considerations and first field tests // Geophys. J. Intern. 2016. Vol. 206. P. 1352–1365.
- Sakurai T., Tamaru K. Simple formulas for two- and three-dimensional capacitances // IEEE Transactions on Electronic Devices. 1983. Vol. ED-30, N 2. P. 183–185.
- Shima H., Sakashita S., Kobayashi T. Developments of noncontact data acquisition techniques in electrical and electromagnetic explorations // J. Appl. Geophysics. 1996. Vol. 35. P. 167–173.
- Shuey R.T., Johnson M. On the phenomenology of electrical relaxation in rocks // Geophysics. 1973. Vol. 38, N 1. P. 37–48.
- Shlykov A., Saraev A., Tezkan B. Study of a permafrost area in the northern part of Siberia using controlled source radiomagnetotellurics // Pure and Appl. Geophys. 2020. Vol. 177. P. 5845–5859.
- Smythe W.R. Static and dynamic electricity. 2nd edition. N.Y.: McGraw-Hill, 1950. 616 p.
- Wait J.R. Geo-Electromagnetism. N.Y.: Acad. Press, 1982. 278 p.
- Zonge K.L., Hughes L.J. Effect of electrode contact resistance on electric field measurements // Expanded Abstr. 1985 Technical Programme of 55th Ann. Intern. SEG Meeting, contrib. MIN 1.5. 1985. Tulsa, OK. P. 231–234.
- Zorin N. Spectral induced polarization of low and moderately polarizable buried objects // Geophysics. 2015. Vol. 80, N 5. P. E267–E276.
- Zorin N.I., Yakovlev A.G. A hybrid receiving line for measuring the electric field in a wide frequency band // Moscow University Geol. Bull. 2021. Vol. 76, N 6. P. 54–60.

Статья поступила в редакцию 25.01.2021,
одобрена после рецензирования 09.03.2022,
принята к публикации 31.08.2022