

УДК 550.831

Л.С. Чепиго¹, И.В. Лыгин², А.А. Булычев³

ПРЯМАЯ ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ГРАВИРАЗВЕДКИ ОТ МНОГОУГОЛЬНИКА С ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», геологический факультет, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, 1

Moscow State University, Faculty of Geology, 119991, Moscow, GSP-1, Leninskiye Gory, 1

Приводится вывод выражения комплексной напряженности поля силы притяжения многоугольника с плотностью, меняющейся по параболическому закону (двумерная модель). Расчет силы тяжести по описываемой формуле может быть выполнен как для внешней, так и для внутренней области.

Ключевые слова: прямая задача гравirazведки, переменная плотность, двумерное моделирование.

The article describes the formula of gravity of a polygon with a density varying according to a parabolic law (two-dimensional model). Calculation of gravity according to the described formula can be made for both external and internal area.

Key words: gravity modeling, variable density, two-dimensional modeling.

Введение. Двумерное плотностное моделирование — одно из важнейших направлений гравirazведки, несмотря на то, что на сегодняшний день большее внимание уделяется построению трехмерных плотностных моделей. В большинстве случаев в процессе интерпретации гравитационного поля двумерные модели выступают в качестве начального приближения для трехмерных моделей. Актуальность создания алгоритма расчета поля от моделей со сложным законом изменения плотности вызвана практической потребностью решения прямых задач для разрезов осадочных отложений значительной мощности (более 10–15 км) в условиях латеральной неоднородности толщ.

Отметим, что в настоящее время разработаны теоретические основы алгоритмов, что позволяет рассчитывать прямой гравитационный эффект от двумерных моделей достаточно сложной конфигурации и со сложным функциональным характером изменения плотности. Успехи в решении этой задачи достигнуты благодаря работам В.Н. Страхова [Страхов, Лучицкий, 1984; Страхов, 1985; Страхов, 1986], а также А.В. Цирульского [Цирульский, 1989], М.С. Жданова [Жданов, 1984]. В частности, В.Н. Страховым были разработаны подходы и алгоритмы решения прямых задач от многоугольников с полиномиальным распределением плотности.

Как уже отмечалось, такая задача имеет большое значение в связи с построением сложных плотностных моделей. В то же время основной аппроксимационной фигурой при решении дву-

мерных задач по-прежнему остается многоугольник с постоянной и в редких случаях с линейной плотностью. Несмотря на то что В.Н. Страхов описал алгоритмический подход к решению такого рода задач, явных аналитических выражений для случая многоугольника даже с параболическим законом изменения плотности нет. В то же время поставленная задача по-прежнему актуальна, на что указывают работы зарубежных исследователей [Zhou, 2010; D'Urso, 2015, 2017].

Цель нашей работы — представить аналитическое решение прямой двумерной задачи гравиметрии для многоугольника с параболическим законом изменения плотности.

Основные положения. В комплексном анализе принято вводить прямоугольную систему координат с осью абсцисс Ox , направленной вправо, и осью ординат Oy , направленной вверх. Поскольку в гравirazведке принято обозначать вертикальную ось Oz (как в двумерном, так и в трехмерном случае), для удобства переобозначим ось ординат в ось Oz , сохранив при этом ее направление вверх.

В этой системе координат точку, в которой будем определять значение поля силы тяжести, обозначим комплексной координатой $s=x+iz$, где i — мнимая единица. Точку, в которой будет находиться источник поля, обозначим как $\sigma=\xi+i\zeta$ (рис. 1).

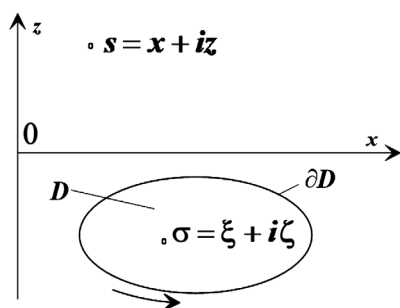
Введем понятие комплексной напряженности гравитационного поля [Страхов, Лучицкий, 1984]:

$$G(s) = g_z(x, z) + ig_x(x, z), \quad (1)$$

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, геологический факультет, кафедра геофизических методов исследования земной коры, аспирант; e-mail: chepigos@yandex.ru

² Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, геологический факультет, кафедра геофизических методов исследования земной коры, доцент, канд. геол.-минер. н.; e-mail: ivanlygin@mail.ru

³ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, геологический факультет, кафедра геофизических методов исследования земной коры, заведующий кафедрой, профессор, докт. физ.-мат. н.; e-mail: aabul@geophys.geol.msu.ru

Рис. 1. Источник поля D с границей ∂D

где g_z и g_x — вертикальная и горизонтальная компоненты поля притяжения. Отметим, что, если вертикальная компонента поля притяжения направлена вниз, то в нашей системе координат она будет иметь отрицательное значение (Булычев и др., 2010).

Решение прямой задачи от некоторой области D с заданной плотностью $\sigma(\xi, \zeta)$ сводится к вычислению следующего площадного интеграла:

$$G(s) = 2iG \int_D \frac{\delta(\xi, \zeta)}{\sigma - s} dS, \quad (2)$$

где G — гравитационная постоянная. Для его решения необходимо выражение плотности представить в виде функции комплексных переменных. Такое представление осуществляется путем подстановок

$$\xi = \frac{\sigma + \bar{\sigma}}{2}, \quad \zeta = \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{2i}, \quad (3)$$

где

$$\delta(\xi, \zeta) = \delta\left(\frac{\sigma + \bar{\sigma}}{2}, \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{2i}\right) = \delta(\sigma, \bar{\sigma}).$$

Далее на основе аналогов формулы Остроградского—Гаусса для комплексной функции [Лаврентьев, Шабат, 1973] осуществляется переход от интегрирования по площади к интегрированию по контуру. Это приведет к следующему выражению для комплексной напряженности гравитационного поля:

$$G(s) = 2iG \int_D \frac{\delta(\sigma, \bar{\sigma})}{\sigma - s} dS = G \oint_{\partial D} \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) + A(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma, \quad (4)$$

$$\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) = \int \delta(\sigma, \bar{\sigma}) d\bar{\sigma}, \quad (5)$$

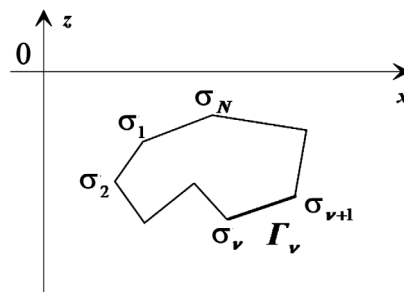
при этом обход контура ∂D , ограничивающего область D , осуществляется против часовой стрелки, т.е., в положительном направлении. $A(\sigma)$ — любая аналитическая в области D и непрерывная на границе этой области функция. В частности, если $A(\sigma) = -\Phi(s, \bar{s})$, то представленное выражение приобретает вид [Страхов, 1985; Жданов, 1984]:

$$G(s) = G \oint_{\partial D} \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) - \Phi(s, \bar{s})}{\sigma - s} d\sigma, \quad (6)$$

и оно будет описывать поле как вне области D (внешняя прямая задача), так и внутри нее (внутренняя прямая задача).

Аналитическое представление комплексной напряженности гравитационного поля многоугольника с параболическим законом распределения плотности. Пусть область D представляет собой многоугольник с N сторонами и вершинами (рис. 2) с плотностью, описываемой параболическим законом:

$$\hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma}) = A\sigma^2 + \bar{A}\bar{\sigma}^2 + B\sigma\bar{\sigma} + C\sigma + \bar{C}\bar{\sigma} + a_0.$$

Рис. 2. Многоугольник с N сторонами и вершинами

Используя подстановку (3), представим плотность как функцию переменных σ и $\bar{\sigma}$:

$$\hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma}) = A\sigma^2 + \bar{A}\bar{\sigma}^2 + B\sigma\bar{\sigma} + C\sigma + \bar{C}\bar{\sigma} + a_0,$$

где

$$A = \frac{a_{2\xi} - a_{2\zeta} - ia_{2\xi\zeta}}{4}, \quad B = \frac{a_{2\xi} + a_{2\zeta}}{2}, \quad C = \frac{a_{1\xi} - ia_{1\zeta}}{2}.$$

На основании выражения (5) определим функцию $\Phi(\sigma, \bar{\sigma})$:

$$\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) = \int \delta(\sigma, \bar{\sigma}) d\bar{\sigma} =$$

$$= A\sigma^2\bar{\sigma} + \frac{\bar{A}}{3}\bar{\sigma}^3 + \frac{B}{2}\sigma\bar{\sigma}^2 + C\sigma\bar{\sigma} + \frac{\bar{C}}{2}\sigma\bar{\sigma}^2 + a_0\bar{\sigma}. \quad (7)$$

Комплексную напряженность $G(s)$ для многоугольника согласно (6) может быть представлена в виде суммы интегралов по его сторонам:

$$G(s) = G \oint_{\partial D} \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) - \Phi(s, \bar{s})}{\sigma - s} d\sigma = G \sum_{v=1}^N \int_{\Gamma_v} \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) - \Phi(s, \bar{s})}{\sigma - s} d\sigma. \quad (8)$$

Для того чтобы вычислить интеграл по стороне Γ_v , необходимо задаться уравнением прямой, совпадающей с ее стороной. Оно может быть представлено в параметрическом или в явном виде.

Воспользуемся представлением уравнения v -ой стороны в явном виде:

$$\bar{\sigma} = \alpha_v \sigma + \beta_v, \quad (9)$$

где

$$\alpha_v = \frac{\bar{\sigma}_{v+1} - \bar{\sigma}_v}{\sigma_{v+1} - \sigma_v}, \quad \beta_v = \bar{\sigma}_v - \alpha_v \sigma_v. \quad (10)$$

На основе соотношений (9, 10) интеграл (8) можно записать в виде:

$$G(s) = G \sum_{v=1}^N \int_{\sigma_v}^{\sigma_{v+1}} \frac{\Phi(\sigma, \alpha_v \sigma + \beta) - \Phi(s, \bar{s})}{\sigma - s} d\sigma. \quad (11)$$

Отметим, что $\sigma_{N+1} = \sigma_1$. Интеграл, стоящий под знаком суммы, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_v}^{\sigma_{v+1}} \frac{\Phi(\sigma, \alpha_v \sigma + \beta) - \Phi(s, \bar{s})}{\sigma - s} d\sigma = \\ = \frac{K_{3v}}{3} (\sigma_{v+1}^3 - \sigma_v^3) + \frac{K_{2v} + K_{3v}s}{2} (\sigma_{v+1}^2 - \sigma_v^2) + \\ + (K_{1v} + K_{2v}s + K_{3v}s^2)(\sigma_{v+1} - \sigma_v) + \\ + (K_{0v} + K_{1v}s + K_{2v}s^2 + K_{3v}s^3) \ln \left(\frac{\sigma_{v+1}s - s}{\sigma_v s - s} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} K_{3v} &= \frac{\bar{A}\alpha_v^3}{3} + \frac{B\alpha_v^2}{2} + A\alpha_v \\ K_{2v} &= \bar{A}\alpha_v^2\beta + B\alpha_v\beta_v + \frac{\bar{C}\alpha_v^2}{2} + A\beta_v + C\alpha_v \\ K_{1v} &= \bar{A}\alpha_v\beta_v^2 + \frac{B\beta_v^2}{2} + \bar{C}\alpha_v\beta_v + C\beta_v + a_0\alpha_v \\ K_{0v} &= \frac{\bar{A}\beta_v^3}{3} + \frac{\bar{C}\beta_v^2}{2} + a_0\beta_v + \Phi(s, \bar{s}) \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

Значение $\Phi(s, \bar{s})$ вычисляется по формуле (7).

Полученные соотношения были положены в основу вычислительной программы по расчету гравитационного эффекта от многоугольника с параболической плотностью. В дальнейшем V_z вычисляется с противоположным знаком, чтобы оперировать со значениями силы притяжения с осью Oz , направленной вниз.

Тестовые расчеты. Для тестовых расчетов была создана модель четырехугольника, вершины которого находились в точках с координатами (20; 50), (130; 50), (130; 100), (20; 100), единицы измерения — метры. Для определения закона изменения плотности были заданы значения плотности в шести точках (таблица).

Значения плотности и координаты точек, по которым определялся плотностной закон

$x, \text{ м}$	$z, \text{ м}$	$\delta, \text{ г/см}^3$
20	50	3,0
130	50	3,0
130	100	3,0
20	100	3,0
60	60	-0,5
35	40	2,0

По этим значениям было получено следующее выражение для распределения плотности:

$$\delta(\xi, \zeta) = 0,00111\xi^2 + 0,00097\zeta^2 - 0,16667\xi - 0,14583\zeta + 10,75000.$$

Эта функция имеет минимум в центре тела с координатами (75, 75) и симметрична относительно нее.

По модели построен сеточный файл (плотностной грид) с шагом по обеим осям 0,2 м, после чего была решена прямая задача для многоугольника (рис. 3) и грида (рис. 4), а также вычислялась вертикальная составляющая силы притяжения V_z .

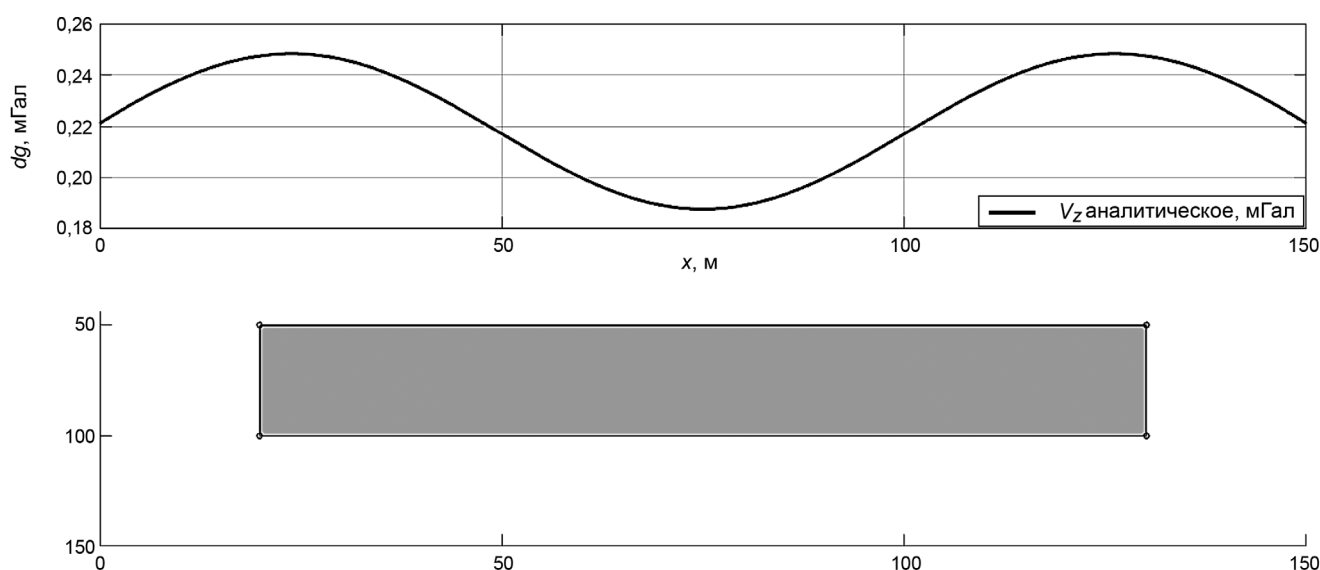


Рис. 3. Результат решения прямой задачи от многоугольника с переменной плотностью по формулам (14)–(18)

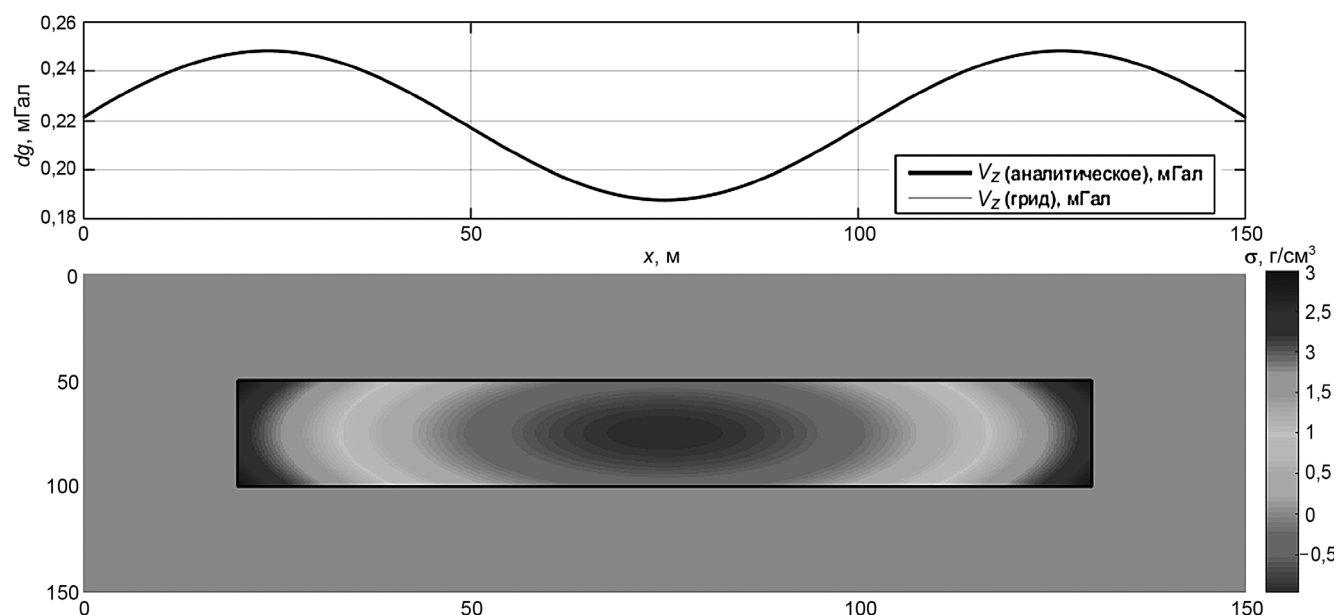


Рис. 4. Результат решения прямой задачи от плотностного грида

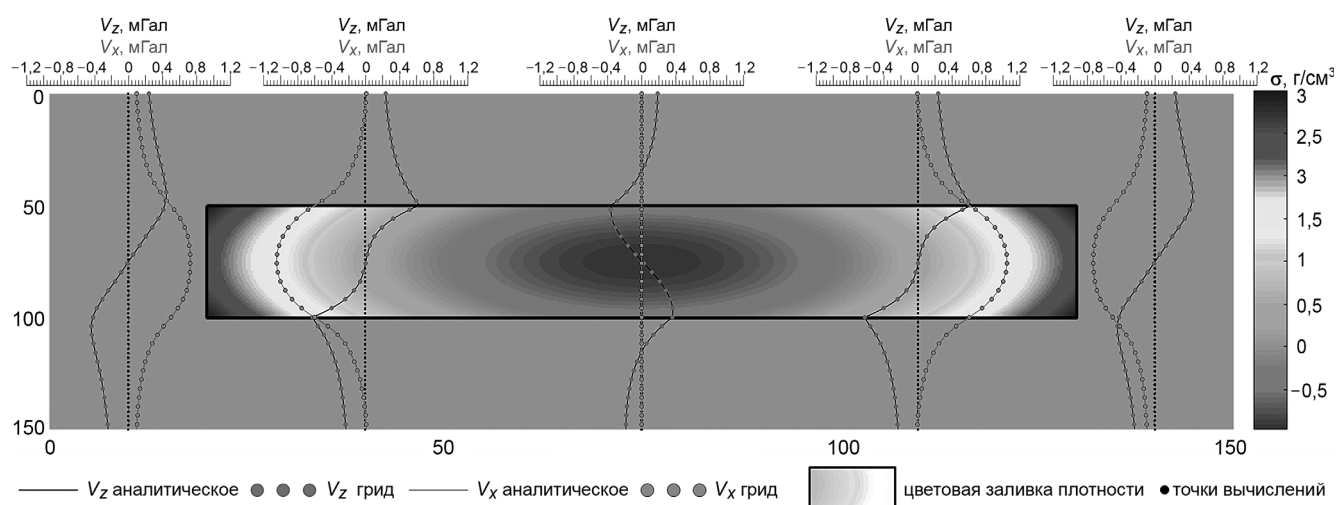


Рис. 5. Результаты решения прямой задачи на вертикальных профилях по формулам (14)–(18) и для грида

Стандартное отклонение между результатами расчета составило 0,035 мГал при амплитуде аномалии 60 мГал, т.е. $\sim 0,06\%$ от амплитуды.

Также был выполнен расчет V_x и V_z для пяти вертикальных профилей (скважин), три из которых пересекают тело (на координатах 40, 75 и 110 м) и две проходят вне тела (на координатах 10 и 140 м). Вычисления также проводились в двух вариантах: по аналитическому выражению и для грида. Шаг по профилям был выбран 2 м (рис. 5).

Сила притяжения на вертикальных профилях, пересекающих тело, имеет точку устранимого разрыва на его границах (глубина 50 и 100 м), что согласуется с теорией [Булычев и др., 2017]. Поскольку распределение плотности

симметрично относительно центра тела (75, 75), по профилям, расположенным симметрично относительно центра (10 и 140, 40 и 110 соответственно), получено одинаковое распределение силы тяжести.

Заключение. Таким образом, выведено выражение для силы притяжения многоугольника с параболическим плотностным законом. С помощью этого выражения силу тяжести можно вычислять как во внешней, так и во внутренней области. Описанную формулу можно применять при моделировании геологических структур с переменной плотностью в случаях, когда аппроксимация телами с постоянной плотностью неприменима.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Булычев А.А., Лыгин И.В., Мелихов В.Р. Численные методы решения прямых задач грави- и магниторазведки (конспект лекций). М.: отдел оперативной печати Геологического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. 2010. 164 с. (URL: http://geophys01.geol.msu.ru/STUDY/facultet/forward08_03_2011.pdf)

Булычев А.А., Лыгин И.В., Соколова Т.Б. и др. Конспект лекций по курсу «Гравиразведка»: Учеб. пособие. Ч. I. М.: КДУ, Университетская книга, 2017. 124 с.

Жданов М.С. Аналогии интеграла типа Коши в теории геофизических полей. М.: Наука, 1984. 327 с.

Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1973. 749 с.

Страхов В.Н. Методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Пермь: ПГУ, 1984. 71 с.

Страхов В.Н., Лучицкий А.И. О решении прямых двумерных задач гравиметрии и магнитометрии // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980. № 8. С. 65–83.

Страхов В.Н., Лучицкий А.И. Решение прямой задачи гравиметрии и магнитометрии для некоторых классов распределения масс // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980 № 10. С. 65–83.

Страхов В.Н., Лапина М.И., Шубникова М.П. Решение прямых двумерных задач гравиметрии и магнитометрии для многоугольников с полиномиальной плотностью и намагниченностью на основе комбинированных алгоритмов // Решение прямой и обратной задач гравиметрии и магнитометрии (вопросы теории и методики). М.: Наука, 1985. С. 102–190.

Цирульский А.В. Вопросы теории и методы интерпретации потенциальных геофизических полей: Учеб. пособие. Л.: ЛГУ, 1989. 96 с.

D'Urso M.G. The Gravity Anomaly of a 2D polygonal body having density contrast given by polynomial functions // Surv. Geophys. 2015. Vol. 36. N 3. P. 391–425.

D'Urso M.G. Gravity Anomaly of a polyhedral bodies having a polynomial density contrast // Surv. Geophys. 2015. 52 p.

Zhou X. Analytic solution of the gravity anomaly of irregular 2D masses with density contrast varying as a 2D polynomial function // Geophysics. 2010. Vol. 75, N 2. P. I11–I19.

Поступила в редакцию 11.12.2018

Поступила с доработки 27.02.2019

Принята к публикации 19.09.2019