

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 550.831

Л.С. Чепиго¹, Н.С. Ткаченко², И.В. Лыгин³

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ПО ГРАВИТАЦИОННОМУ ПОЛЮ, ЗАДАННОМУ НА СФЕРЕ

Приводится описание метода определения параметров точечного источника по значениям гравитационного поля, заданным на сферической поверхности. На модельных примерах выполнено определение глубины точечного источника с использованием выражений для поля, заданного на плоскости, и с использованием предложенного метода. Сравнение результатов, полученных двумя методами, позволяет сделать выводы об условиях практического применения разработанного метода.

Ключевые слова: гравиразведка, небесные тела, обратная задача гравиразведки, прямая задача гравиразведки, метод характерных точек.

The article describes a method of calculation of point source's parameters from the gravity field, measured on a sphere. Conclusions about the conditions for the practical application of the developed method are drawn on the basis of a comparison of the results of spherical source coordinates and mass estimation by a field given on the plane and on the sphere.

Key words: gravity, inverse problem, forward problem, iti-method.

Введение. В последние годы по результатам спутниковых миссий (GRACE, GOCE, GRAIL, KAGYA) получены новые модели гравитационного поля Земли [Tapley et al., 2004] и Луны [Kato et al., 2010; Zuber et al., 2013], которые характеризуются высокой степенью точности (до $\pm 0,01$ мкГал) и детальности от 1° до $1'$ [Save et al., 2016; Wiese et al., 2016].

Такие модели содержат информацию о высокочастотных аномалиях гравитационного поля, их можно использовать не только для решения планетарных задач гравиметрии, но и для геологического изучения плотностных неоднородностей литосферы и верхней мантии.

Для решения такой задачи необходима адаптация математических методов решения обратной задачи гравиразведки, широко развитых для расчетов на плоскости, к применению их на сферической поверхности. В частности, одно из важнейших направлений — разработка методов локализации особых точек по гравитационному полю, заданному на сфере, с помощью которых можно определять координаты и массу источников гравитационного поля, расположенных внутри сферы.

В гравиразведке для решения задачи определения глубины залегания и массы точечного источника по полю, заданному на плоскости, широко используются методы характерных точек (МХТ). Основное внимание исследователей при решении

задач гравиразведки с учетом сферичности Земли сосредоточено на решении прямых задач [Старостенко и др., 1986; Булычев и др., 1998; Кузнецов и др., 2017] в сферической системе координат. При этом экспресс-методы оценки параметров источников аномалий, т.е. методы решения обратных задач практически не рассматриваются. В связи с этим может быть поставлена задача адаптации математических методов решения обратной задачи гравиразведки, разработанных для расчетов на плоскости, к полям, заданным на сферической поверхности.

Математические основы метода. При определении параметров геологических объектов, создающих гравитационные аномалии, эти объекты часто уподобляют телам, имеющим правильную форму. Так, многие геологические объекты более или менее изометричной формы можно аппроксимировать сферическим (точечным) источником. Степень соответствия тем выше, чем больше расстояние от тела до притягиваемой точки [Миронов, 1980]. Классический способ определения параметров сферической массы (положение центра и масса) по гравитационному полю, заданному на плоскости, описан практически во всех учебниках по гравиразведке [Миронов, 1980]. Его простейшая реализация в гравиразведке известна под названием «метод характерных точек», в котором глубина залегания сферического источника h опре-

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, геологический факультет, кафедра геофизических методов исследования земной коры, аспирант; *e-mail:* chepigos@yandex.ru

² Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, геологический факультет, кафедра геофизических методов исследования земной коры, аспирантка; *e-mail:* kostinans@mail.ru

³ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, геологический факультет, кафедра геофизических методов исследования земной коры, доцент, канд. геол.-минер. н.; *e-mail:* ivanlygin@mail.ru

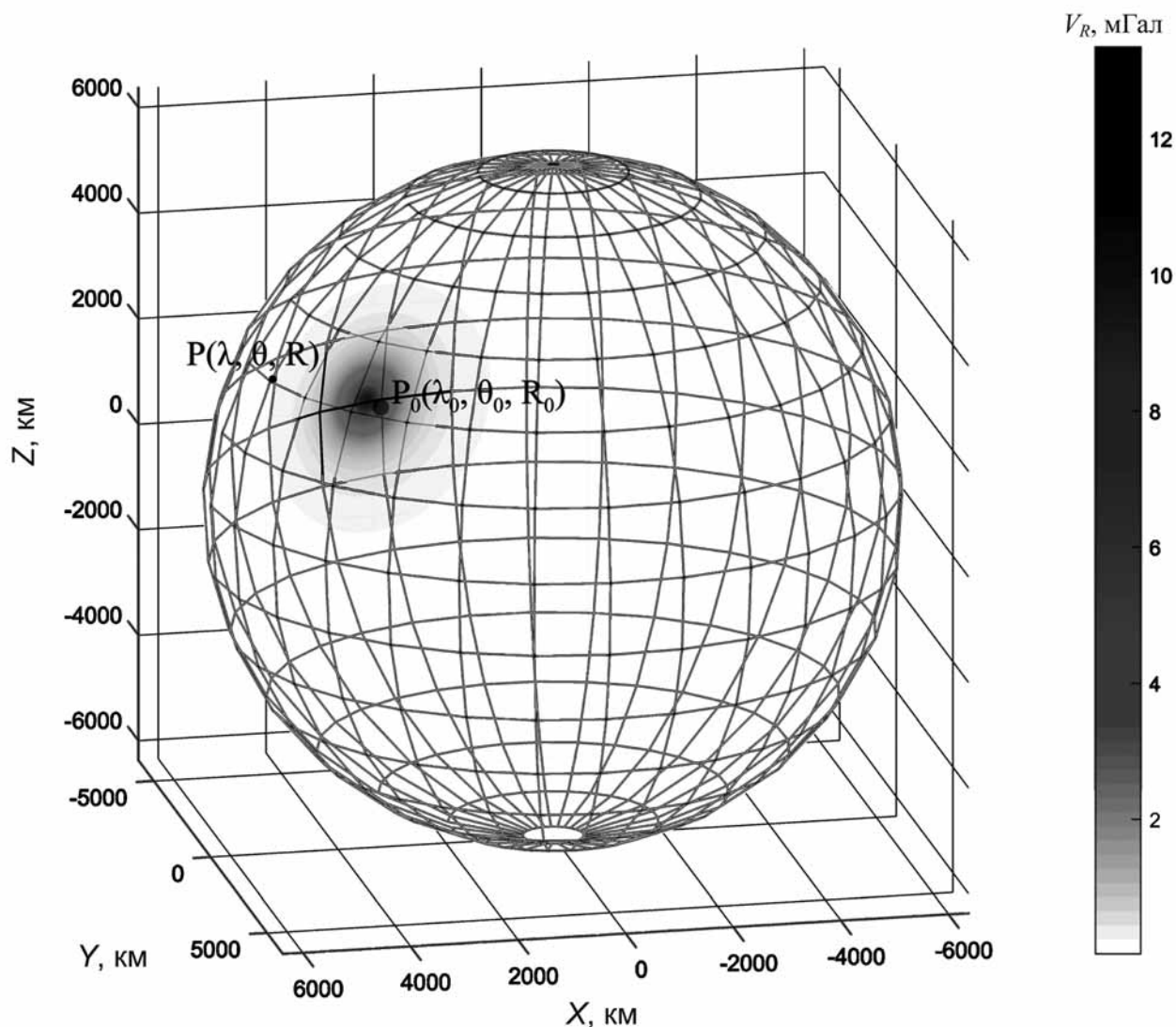


Рис. 1. Гравитационное поле точечного источника на сфере

деляется через расстояние $x_{1/2}$ от экстремума аномалии поля силы тяжести до точки, для которой амплитуда аномалии в 2 раза меньше максимального значения [Блох, 2009; Булычев и др., 2017]:

$$h = 1,31x_{1/2}. \quad (1)$$

Рассмотрим случай определения параметров сферической массы по гравитационному полю, заданному на сферической поверхности. В сферической системе координат положение точки определяется значением трех координат (R, θ, λ) , где R — расстояние от начала координат до точки, θ и λ — зенитный и азимутальный углы соответственно.

Пусть центр масс источника гравитационного поля (сферическая масса) находится внутри сферы радиуса R в некоторой точке с координатами $P_0(R_0, \theta_0, \lambda_0)$ и пусть в точках на поверхности сферы $P(R, \theta, \lambda)$ известно его гравитационное поле (рис. 1). Определим положение центра масс источника и его массу по известным значениям гравитаци-

онного поля — гравитационного потенциала и вертикальной (радиальной) составляющей силы притяжения.

В сферической системе координат гравитационный потенциал сферической массы M , расположенной в точке $P_0(R_0, \theta_0, \lambda_0)$, в произвольной точке $P(R, \theta, \lambda)$ выражается формулой:

$$V(P) = G \frac{M}{R_{PP_0}} = G \frac{M}{\sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \psi}}, \quad (2)$$

$$\cos \psi = \sin \theta_0 \sin \theta \cos(\lambda_0 - \lambda) + \cos \theta_0 \cos \theta, \quad (3)$$

где G — гравитационная постоянная.

Дифференцируя выражение для потенциала по направлению к центру сферы, получим выражение для вертикальной (радиальной) составляющей силы притяжения сферической массы в точке P :

$$V_R(P) = -V'(P) = GM \frac{R - R_0 \cos \psi}{(R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \psi)^{3/2}}. \quad (4)$$

На сфере заданного радиуса гравитационный потенциал и сила притяжения достигают экстремума в точке с широтой и долготой, равными широте и долготе точечной массы соответственно. Следовательно, в точке экстремума $\theta_{\max} = \theta_0$ и $\lambda_{\max} = \lambda_0$; $\cos \psi = 1$ и выражения для гравитационного потенциала и силы тяжести в точке экстремума имеют вид:

$$V_{\max} = GM \frac{1}{R - R_0}, \quad (5)$$

$$V_{R_{\max}} = GM \frac{1}{(R - R_0)^2}. \quad (6)$$

Расстояние от начала координат до точечной массы R_0 можно определить через отношение соответствующих компонент гравитационного действия сферы (гравитационного потенциала, силы тяжести) в точке P к максимальному значению (n, k):

$$n = \frac{V(P)}{V_{\max}} = \frac{R - R_0}{\sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \psi}}, \quad (7)$$

$$k = \frac{V_R(P)}{V_{R_{\max}}} = \frac{(R - R_0 \cos \psi)(R - R_0)^2}{(R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos \psi)^{3/2}}. \quad (8)$$

Выражение (7) сводится к уравнению 2-й степени относительно R_0 , которое имеет два корня: больше и меньше R , из которых условию задачи удовлетворяет только меньший, поскольку источник находится внутри сферы:

$$R_0^2 - 2RR_0 \frac{1 - n^2 \cos \psi}{1 - n^2} + R^2 = 0, \quad (9)$$

$$R_0 = \frac{k \sqrt{(1 - \cos \psi)(2 - k^2(1 + \cos \psi)) + k^2 \cos \psi - 1}}{k^2 - 1} R. \quad (10)$$

Выражение (8) сводится к алгебраическому уравнению 6-й степени относительно R_0 :

$$k_6 R_0^6 + k_5 R_0^5 + k_4 R_0^4 + k_3 R_0^3 + k_2 R_0^2 + k_1 R_0 + k_0 = 0, \quad (11)$$

$$k_6 = k^2 - \cos 2\psi,$$

$$k_5 = R(4\cos^2 \psi - 6k^2 \cos \psi + 2\cos \psi),$$

$$k_4 = R^2(12k^2 \cos^2 \psi - 6\cos^2 \psi + 3k^2 - 8\cos \psi - 1),$$

$$k_3 = R^3(-8k^2 \cos^3 \psi + 4\cos^2 \psi - 12k^2 \cos \psi + 12\cos \psi + 4),$$

$$k_2 = R^4(12k^2 \cos^2 \psi - \cos^2 \psi + 3k^2 - 8\cos \psi - 6),$$

$$k_1 = R^5(-6k^2 \cos \psi + 2\cos \psi + 4),$$

$$k_0 = R^6(k^2 - 1).$$

Уравнение (11) решается численными методами (например, методом касательных) с заданной точностью. Среди шести возможных корней уравнения единственное искомое решение — действительное значение, величина которого меньше R .

Масса сферы определяется с учетом найденного положения центра сферы:

$$M = \frac{V_{\max}(R - R_0)}{G}, \quad (12)$$

$$M = \frac{V_{R_{\max}}(R - R_0)^2}{G}. \quad (13)$$

Алгоритмизация метода и тестовые расчеты.

Для расчета параметров точечных источников по гравитационному полю, заданному на сфере, в среде Matlab реализован следующий алгоритм. В качестве входных данных задается сеточный файл аномального гравитационного потенциала или поля силы тяжести в географической системе координат, покрывающий сферическую поверхность частично либо полностью, и определяется радиус, на котором определено поле. В автоматическом режиме выбирается экстремум поля. На основе формул (9)–(13) вычисляются глубина залегания источника и его масса. Увеличение точности расчетов достигается многократным решением уравнений (9), (11) для всех точек задания поля (кроме точки экстремума). Результаты работы программы — глубина до источника и его масса. Опционально могут быть вычислены плотность или радиус источника в зависимости от заданного параметра.

Ниже представлены результаты оценки значений глубины известного точечного источника с использованием предложенного алгоритма: а) для теоретических (точных) значений элементов гравитационного поля и б) для теоретических значений с «добавлением» шума. Также были рассчитаны значения гравитационного поля на плоскости с использованием цилиндрической проекции поля, заданного на сферической поверхности, и выполнены оценки глубины точечного источника с использованием известного метода характерных точек.

Для тестовых расчетов выбраны три сферические поверхности, соответствующие малому небесному телу (например, Луне) с радиусом 2000 км, среднему (например, Земле) с радиусом 6371 км и крупному (например, Нептуну) с радиусом 25 000 км. На каждой сфере по всей поверхности с дискретностью $0,5^\circ \times 0,5^\circ$ заданы точные (теоретические) значения гравитационного поля точечного источника, расположенного на глубине 30, 100, 250 и 500 км от поверхности сфер (рис. 1). Масса источника выбрана $5 \cdot 10^{14}$ кг (при плотности $0,12$ г/см³ радиус равен 9,98 км), широта и долгота источника составляют 30° и 40° соответственно.

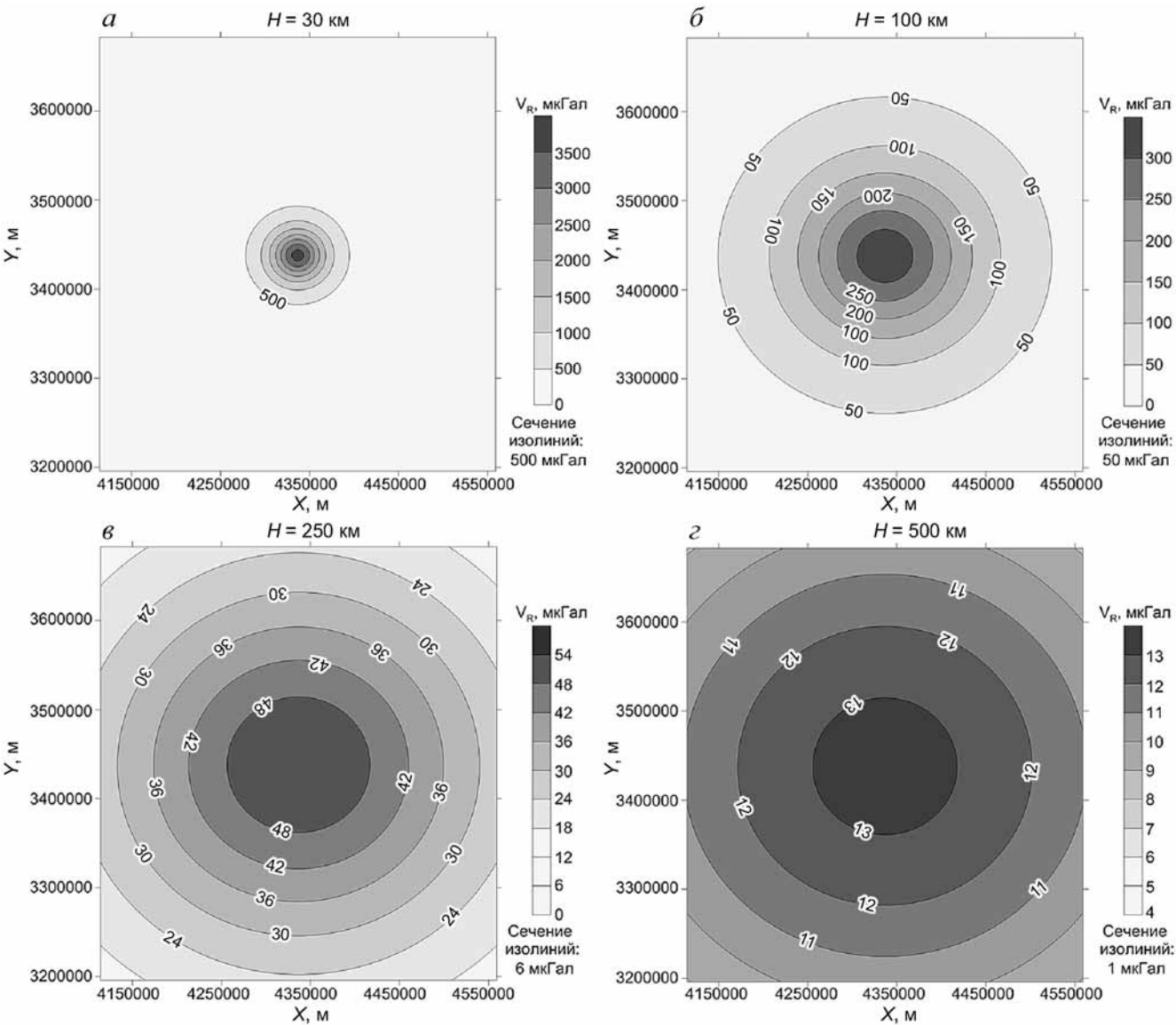


Рис. 2. Сила притяжения точечной массы, расположенной на глубине: а — 30 км, б — 100 км, в — 250 км, г — 500 км на поверхности сферы радиусом 6371 км

В табл. 1 приведены результаты определения глубины залегания точечного источника двумя способами: с учетом сферичности и на плоскости. Для решения обратной задачи на плоскости сферические координаты пересчитаны в цилиндрическую проекцию Миллера (рис. 2), вычисления выполнены с использованием формулы (1).

Очевидно, что при определении положения центра масс источника без учета сферичности глубина оказывается завышенной. Погрешность возрастает с увеличением глубины залегания центра масс и с уменьшением радиуса сферы, на которой задана аномалия. При учете сферичности результаты соответствуют теоретическим значениям при условии, что исключены ошибки при измерении поля силы тяжести.

Для оценки чувствительности описываемого метода к помехам для модели с источником на глубине 500 км для всех сфер в гравитационное поле добавлен белый шум с уровнем 5, 10 и 15%

Таблица 1
Сравнение результатов определения глубины точечного источника с учетом и без учета сферичности

Радиус сферы, км	Истинная глубина, км	Глубина по обратной задаче		Относительное расхождение, %
		с учетом сферичности, км	на плоскости, км	
2000	30	30	35	17
	100	100	119	19
	250	250	328	31
	500	500	713	43
6371	30	30	34	13
	100	100	117	17
	250	250	297	19
	500	500	637	27
25000	30	30	33	10
	100	100	115	15
	250	250	292	17
	500	500	595	18

от максимального значения поля. Параметры источника определяли по значениям радиальной компоненты силы притяжения, которые отличаются от максимального значения не более чем в 2 раза. В табл. 2 представлены результаты оценок глубины залегания точечного источника по «за шумленным» данным.

Таблица 2

Сравнение результатов определения глубины точечного источника с учетом и без учета сферичности

Радиус сферы, км	Глубина источника, км	Глубина при уровне шума, %			Относительная погрешность при уровне шума, %		
		5	10	15	5	10	15
2000	30	31,6	27,4	34,0	5,4	8,7	13,2
	100	94,3	90,0	112,1	5,7	10,0	12,1
	250	236,5	227,1	220,7	5,4	9,2	11,7
	500	469,7	445,4	570,2	6,1	10,9	14,0
6371	30	28,2	32,9	33,1	6,1	9,7	10,4
	100	93,7	89,7	113,7	6,3	10,3	13,7
	250	234,5	276,9	217,6	6,2	10,7	13,0
	500	463,5	565,7	574,0	7,3	13,1	14,8
25000	30	31,9	27,1	33,2	6,2	9,6	10,8
	100	106,1	111,1	87,7	6,1	11,1	12,3
	250	233,1	222,5	215,2	6,7	11,0	13,9
	500	453,3	415,7	589,5	9,3	16,9	17,7

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Блох Ю.И. Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий: Учеб. пособие. М.: РГГРУ, 2009. 232 с.

Булычев А.А., Кривошея К.В., Мелихов В.Р., Зальцман Р.В. Вычисление аномального гравитационного потенциала и его производных на сфере // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 4. Геология. 1998. № 2. С. 42–46.

Булычев А.А., Лыгин И.В., Мелихов В.Р. Численные методы решения прямых задач гравиметрии и магниторастворки (конспект лекций): Учеб. пособие для студентов и магистрантов специализации «Геофизика». М., 2010. 164 с.

Булычев А.А., Лыгин И.В., Соколова Т.Б. и др. Конспект лекций по курсу «Гравирастворка». Ч. I. М.: КДУ, «Университетская книга», 2017. 124 с.

Кузнецов К.М., Лыгин И.В., Булычев А.А. Алгоритм численного решения прямой задачи гравиметрии от сферического слоя переменной плотности // Геофизика. 2017. № 1. С. 22–27.

Миронов В.С. Курс гравирастворки. 2-е изд., перераб. и доп. Л.: Недра, 1980. 543 с.

Старостенко В.И., Манукян А.Г., Заворотко А.Н. Методы решения прямых задач гравиметрии и магнит-

Из данных табл. 2 следует, что хотя увеличение уровня шума увеличивает погрешность определения расчетных параметров, но в меньшей степени; с увеличением же радиуса сферы вклад шумовой компоненты незначительно увеличивается. Относительная погрешность определения глубины только для случая уровня шума 15% на сфере с радиусом 6371 км не превышает 15%. С точки зрения гравирастворки это весьма неплохой результат: точность определения глубин по МХТ на плоскости обычно оценивается в 10–20%. Таким образом, можно заключить, что разработанный метод, несмотря на отсутствие дополнительных процедур по фильтрации исходных данных, достаточно устойчив к шуму.

Заключение. Показано выражение, на основе которого можно определять положение точечного источника внутри сферы по распределению аномального гравитационного потенциала или аномалий силы притяжения на ней. По результатам сравнения параметров аномалиеобразующих тел, определенных с учетом и без учета сферичности, показано, что неучет сферичности может приводить к значительным ошибкам. Устойчивость метода к помехам растет с увеличением радиуса сферы. Для условий Земли наличие помех на уровне 15% приводит к ошибке определения глубины источника не более 15%.

тометрии на шарообразных планетах. Киев: Наукова думка, 1986. 112 с.

Kato M., Sasaki S., Takizawa Y. The Kaguya mission overview // Space Sci. Rev. 2010. Vol. 154, N 1–4. P. 3–19.

Save H., Bettadpur S., Tapley B.D. High-resolution CSR GRACE RL05 mascons: HIGH-RESOLUTION CSR GRACE RL05 MASCONS // J. Geophys. Res. Solid Earth. 2016. Vol. 121, N 10. P. 7547–7569.

Tapley B.D., Bettadpur S., Watkins M. et al. The gravity recovery and climate experiment: Mission overview and early results: GRACE mission overview and early results // Geophys. Res. Lett. 2004. Vol. 31, N 9. P. 1–4.

Wiese D.N., Landerer F.W., Watkins M.M. Quantifying and reducing leakage errors in the JPL RL05M GRACE mascon solution: GRACE JPL RL05M leakage error reduction // Water Resour. Res. 2016. Vol. 52, N 9. P. 7490–7502.

Zuber M.T., Smith D.E., Watkins M.M. et al. Gravity field of the moon from the gravity recovery and interior laboratory (GRAIL) mission // Science. 2013. Vol. 339, N 6120. P. 668–671.

Поступила в редакцию

Поступила с доработки

Принята к публикации